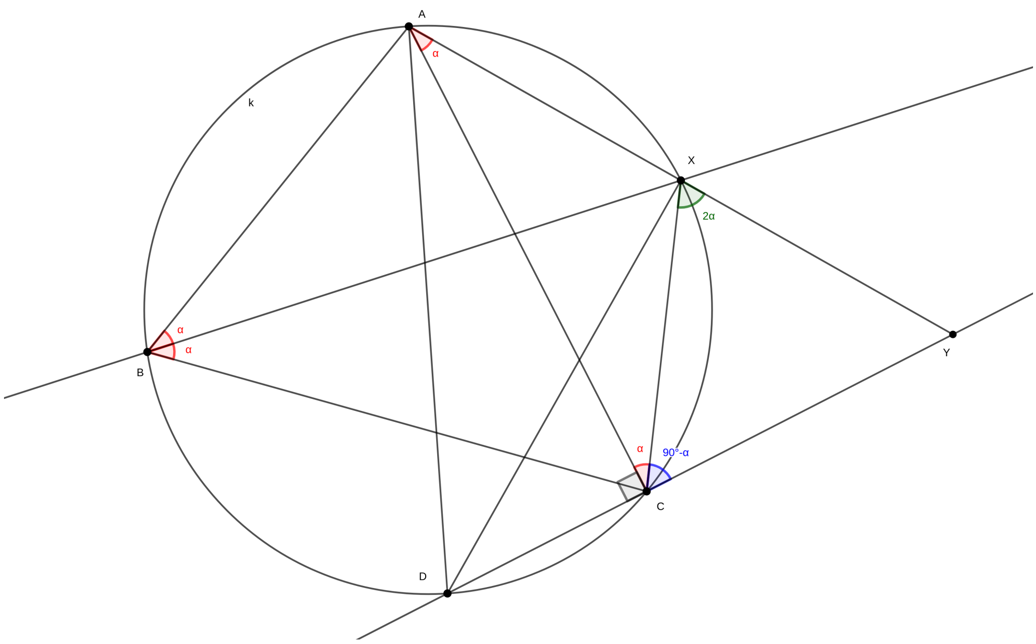
SMO 2019 - Musterlösung

-

Preliminary remark: for every problem, up to 2 points can be deducted from a complete solution for (minor) flaws.

1. Sei A ein Punkt und sei k ein Kreis durch A. Seien B und C zwei weitere Punkte auf k. Weiter seien X der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ mit k und Y die Spiegelung von A am Punkt X. Sei D der Schnittpunkt der Geraden YC mit k. Zeige, dass der Punkt D nicht von der Wahl von B und C auf dem Kreis k abhängt.

1. Lösung: (Paul)



Sei $\angle ABX = \alpha$. Da BX die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ ist, gilt $\angle XBC = \alpha$. Da $ABCX$ ein Sehnenviereck ist, gilt auch $\angle XAC = \angle ACX = \alpha$. Dies bedeutet, dass $AX = XC$. Zusammen mit der Bedingung, dass Y die Spiegelung von A an X ist, ergibt sich $XC = XY$. Wir benutzen nochmal das Sehnenviereck $ABCX$, um

$$\angle YXC = 180^\circ - \angle CXA = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABC) = 2\alpha$$

zu erhalten. Da XCY gleichschenklig ist, gilt dann $\angle XCY = 90^\circ - \alpha$. Schliesslich ist

$$\angle DCA = 180^\circ - \angle ACX - \angle XCY = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ.$$

Dann folgt aus dem Satz von Thales, dass die Strecke AD ein Durchmesser des Kreises k ist. Insbesondere hängt der Ort des Punkts D nur von A und nicht von B oder C ab.

2. Lösung: (Arnaud) Dans la même veine, on observe que

$$\angle ADX = \angle ABX = \angle CBX = \angle YDX.$$

La droite DX est donc la bissectrice de l'angle $\angle ADY$. Or, X se trouve sur DX et X est le milieu de AY, donc DX est perpendiculaire à AY (dans le triangle isocèle ADY, la bissectrice et la hauteur issues de D se confondent). Autrement dit, $\angle AXD = 90°$ et on conclut par le cercle de Thalès que D est simplement le point diamétralement opposé à A sur k.

3. Lösung: (David) Like in the first solution, we immediately get $\angle XAC = \angle XCA$ and we conclude $XA = XC = XY$. So X is the center of a circle going through A, C, Y and with AY as a diameter. By Thales, we get $\angle ACY = 90°$ and we conclude.

4. Lösung: (Louis) Il est bien connu que la bissectrice d'un sommet et la médiatrice du côté opposé se coupent sur le cercle circonscrit (WUM), donc X appartient à la médiatrice du segment CA. Si on introduit M le milieu du segment CA, on trouve alors que $\angle CMA = 90°$ et le triangle ACY est l'image du triangle AMX par une homothétie de centre A et de rapport 2. On en déduit ainsi que $\angle ACY = \angle AMX = 90°$. À partir de là on conclut comme dans les solutions précédentes que AD est un diamètre de k.

Marking scheme:

(a) 5P: proving $\angle DCA = 90°$ (or another right angle: $\angle DXA = 90°$ or $\angle DBA = 90°$). At most 2 partial points for this step:

   i. 2P: for proving either $AX = XC$, $YX = XC$ **or** $\angle ADX = \angle XDY$

(b) 2P: $\angle DCA = 90°$ (or another right angle) $\Rightarrow$ mit Thales fertig

Bemerkung: Ein Punkt kann abgezogen werden falls der letzte Schritt nicht genau genug erklärt wird.

2. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers et M un sous-ensemble de $\mathbb{P}$ ayant au moins trois éléments. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout sous-ensemble $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ de M tel que $A \neq M$, tous les facteurs premiers du nombre $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k - 1$ se trouvent dans M. Montrer que $M = \mathbb{P}$.

Première solution: (Arnaud) Que peut-on dire des (au moins) trois éléments de M ? Au moins deux d'entre eux, disons $p_3, p_4 \in M$, sont impairs. En appliquant la condition pour $A = \{p_3\}$, on obtient donc $2 \in M$. A-t-on forcément $3 \in M$? Supposons que $3 \notin \{p_3, p_4\}$, alors on a soit $p_3 \equiv 1 \pmod 3$ ou $2p_3 \equiv 1 \pmod 3$. En appliquant la condition avec $A = \{p_3\}$ ou $A = \{2, p_3\}$ on conclut donc $3 \in M$.

Peut-on continuer ainsi ? En particulier, est-ce que M pourrait avoir seulement un nombre fini d'éléments ? Supposons que M soit fini et écrivons $M = \{2, 3, p_3, \ldots, p_k\}$. On rappelle que M contient au moins un autre élément que 2 et 3 (noter que sans cette condition, alors $M = \{2, 3\}$ satisferait toutes les autres conditions du problème). Comme Euclide avant nous, considérons la condition appliquée pour $A = M \setminus \{2\}$. Il doit alors exister un entier $a \geq 2$ tel que

$$3p_3 \ldots p_k - 1 = 2^a \iff 3p_3 \ldots p_k = 2^a + 1,$$

car le nombre $3p_3 \ldots p_k - 1$ ne peut être divisible que par $2 \in M$ et $3p_3 \ldots p_k - 1 \geq 4$, car $p_3 \geq 5$ (c'est ici que l'on utilise que M contient au moins un troisième élément p_3). De même, avec $A = M \setminus \{3\}$, il existe un entier $b \geq 2$ tel que

$$2p_3 \ldots p_k = 3^b + 1.$$

On doit donc avoir $2^{a+1} + 2 = 3^{b+1} + 3$ et ainsi $2^{a+1} = 3^{b+1} + 1$. Comme $a + 1 \geq 3$, on doit avoir $8 | 3^{b+1} + 1$. Or $3^n \equiv 1, 3 \pmod 8$. Contradiction. On obtient ainsi que M est un ensemble infini de nombres premiers.

Soit maintenant un nombre premier quelconque q. On veut montrer que $q \in M$. On doit donc trouver un certain nombre de nombres premiers $p_1, \ldots, p_k \in M$ tels que leur produit est congruent à $1 \pmod q$. On est libre de choisir k et les p_i (sans restriction) comme on le souhaite. Une telle relation fait penser au Petit Théorème de Fermat. Si l'on pouvait trouver $q - 1$ éléments $p_1, \ldots, p_{q-1}$ dans M, tous congruents, i.e. $p_i \equiv a \pmod q \, \forall i$, alors on aurait

$$p_1 \ldots p_{q-1} \equiv a^{q-1} \equiv 1 \pmod q$$

qui implique donc $q \in M$.

Or, M est un ensemble infini, ainsi pour au moins un élément $a \in \{1, \ldots, q-1\}$ (principe des tiroirs), il existe une infinité d'éléments $p_i \in M$ congruents à $a \pmod q$. En particulier, au moins $q - 1$. On a ainsi terminé.

Marking scheme:

(a) 4P: M is infinite: At most 3 partial points:

  i. 1P: Finding two explicit elements (for example $2, 3 \in M$)

  ii. 1P: Prove a relation of the type $p_1 \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_n - 1 = p_j^k$ (by considering $A = M \setminus \{p_j\}$)

  iii. 1P: Use two distinct sets $A = M \setminus \{p_i\}, M \setminus \{p_j\}$ **and** combine the two equations in order to get a contradiction.

Note: If no other point is awarded for this exercise, ii. without justification is worth one point.

(b) 3P: Conclude $M = \mathbb{P}$. At most 1 partial point:

i. 1P: Take $q \in \mathbb{P} \setminus M$ and try to work modulo q.

3. Déterminer toutes les suites périodiques $x_1, x_2, x_3, \dots$ de nombres réels strictement positifs telles que pour tout $n \geq 1$

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right).$$

Réponse: Les seules solutions sont les suites de période au plus 2. Plus précisément ce sont toutes les suites avec $x_1 = a$ et $x_2 = \frac{1}{a}$, où a désigne n'importe quel nombre réel positif.

Première solution: (Arnaud, by David) Comme proposé en cours, on commence par malaxer l'expression qui définit la suite. Si l'on supprime la fraction, on obtient

$$2x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+1}x_n + 1.$$

Il paraît à présent naturel d'introduire la nouvelle suite $y_n := x_{n+1}x_n$ pour $n \geq 1$. Si la suite $\{x_n\}$ est périodique, alors la suite $\{y_n\}$ l'est aussi. On a la relation $2y_{n+1} = y_n + 1$. Au feeling, il semble qu'une telle suite ne puisse pas vraiment être périodique en général.
Une obstruction classique à la périodicité est la **monotonie**. Que peut-on dire de la monotonie de la suite $\{y_n\}$? On remarque que

$$y_{n+1} < y_n \Longleftrightarrow y_n > 1.$$

De plus, si $y_n > 1$, alors clairement $y_{n+1} = 1/2(y_n + 1) > 1$. Autrement dit, la monotonie de la suite $\{y_n\}$ dépend uniquement du signe de $y_1 - 1$. En effet, on a

- si $y_1 > 1$, alors $y_n > 1$, $\forall n$ et $\{y_n\}$ est une suite strictement décroissante,
- si $y_1 < 1$, alors $y_n < 1$, $\forall n$ et $\{y_n\}$ est une suite strictement croissante,
- $y_1 = 1$, alors $y_n = 1$, $\forall n$ est une suite constante.

Dans les deux premiers cas, la périodicité contredit la monotonie stricte. On conclut ainsi que $y_n = 1$ pour tout n. En revenant à la suite $\{x_n\}$, on a alors $x_{n+1}x_n = 1$ pour tout n. Autrement dit, $x_{n+1} = 1/x_n$ ou encore

$$x_n = \begin{cases} x_2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ x_1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad x_1x_2 = 1.$$

On vérifie à présent que toutes ces suites satisfont les hypothèses de départ. Une telle suite est périodique avec période 2 et on a bien $2 = 1 + 1$.

Deuxième solution: (Arnaud) Plutôt qu'introduire la nouvelle suite $y_n = x_{n+1}x_n$, on introduit $z_n := x_{n+1}x_n - 1 = y_n - 1$ pour $n \geq 1$. Si la suite $\{x_n\}$ est périodique, alors la nouvelle suite $\{z_n\}$ est évidement périodique. La relation devient alors,

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n.$$

Autrement dit, la suite $\{z_n\}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Si $z_1 \neq 0$, alors $\{z_n\}$ est une suite strictement monotone (et convergente) et donc ne peur pas être périodique. On doit donc avoir $z_1 = 0$ et ainsi $z_n = 0$ pour tout n. On conclut de la même manière que précédemment.

Dritte Lösung (Sketch): (Paul) Es geht auch ganz ohne Substitution, aber mit vielen Fallunterscheidungen. Um Platz zu sparen, schreiben wir symmetrische Fälle nicht auf.

(a) **Lemma:** $x_0 < 1 < x_1 \Rightarrow x_{2n} < 1 < x_{2n+1}$ für alle n.

(b) $x_0 = 1, x_1 > 1$: Dann ist $x_2 < 1$, dank (a) kann die Folge danach die Zahl $x_0 = 1$ nie wieder erreichen.

(c) $x_0, x_1 > 1$: Wegen (a) und (b) muss dann $x_i > 1$ für alle i gelten. Dann kann man für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen, dass $x_{n+2} < x_n$ gilt, ein Widerspruch zur Periodizität.

(d) $\frac{1}{x_1} < x_0 < 1 < x_1$: Dann kann man $x_{2n} < x_0 < 1 < x_1 < x_{2n+1}$ zeigen, wieder ein Widerspruch zur Periodizität.

(e) $\frac{1}{x_1} = x_0 \leq 1 \leq x_1$: Dann erhält man alle Lösungen.

Marking scheme:

(a) 1P: explicitely proving that all sequences of the form $x_1 x_2 = 1$, $x_{2n+1} = x_1$ and $x_{2n} = x_2$ satisfy the conditions of the problem

(b) 6P: proving that any sequence satisfying the conditions of the problem indeed is of this form.

- First solution ($y_n = x_{n+1}x_n$):
  - substituition $y_n = x_{n+1}x_n$ and rewriting the inductive relation: 2P.
  - $\{x_n\}$ periodic $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ periodic: 1P.
  - prove that if $y_1 \neq 1$, then the sequence is strictly monotone (or any other property that contradicts periodicity) : 2P.

    Note: only one of the cases ($y_1 > 1$ or $y_1 < 1$) gives one point.
  - conclusion: 1P.
- Second solution ($z_n = x_{n+1}x_n - 1$):
  - substituition $z_n = x_{n+1}x_n - 1$ and rewriting the inductive relation: 3P.
  - $\{x_n\}$ periodic $\Rightarrow$ $\{z_n\}$ periodic: 1P.
  - prove that if $z_1 \neq 0$, then the sequence is strictly monotone (or any other property that contradicts periodicity) : 1P.
  - conclusion: 1P.
- Third solution (blind cases distinction):
  - part (a) of the solution, i.e. Lemma: 1P.
  - part (b) of the solution, i.e. case $x_1 = 1, x_2 \neq 1$ and $x_1 \neq 1, x_2 = 1$: 1P.
  - part (c) of the solution, i.e. case $x_1, x_2 > 1$ and $x_1, x_2 < 1$: 2P.
  - part (d) of the solution, i.e. case $x_1 < 1 < x_2$ and $x_2 < 1 < x_1$ with $x_1 x_2 \neq 1$: 2P.
  - Note: the point (e) in the solution is basically checking solutions and thus is marked according to the first part of the marking scheme (i.e. part (a) of the marking scheme)

4. Sei n eine natürliche Zahl. In einer Reihe stehen $n+1$ Schüsseln, die von links nach rechts mit den Zahlen $0, 1, \ldots, n$ nummeriert sind. Am Anfang liegen n Steine in der Schüssel 0 und kein Stein in den anderen Schüsseln. Sisyphus will diese n Steine in die Schüssel n bewegen. Dafür bewegt Sisyphus in jedem Zug genau einen Stein von einer Schüssel i mit k Steinen um höchstens k Schüsseln nach rechts, also in eine Schüssel mit Nummer kleiner oder gleich $k+i$. Sei T die minimale Anzahl Züge, die Sisyphus benötigt, um alle Steine in die Schüssel n zu bewegen. Zeige, dass gilt:

$$T \geq \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \ldots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil .$$

Lösung: (David) Wir ordnen jedem Stein eine eindeutige Zahl $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zu und nennen diese Zahl seine *Priorität*. Wenn Sisyphus einen Zug macht, wählt er ein Feld aus und bewegt von diesem Feld oBdA den Stein mit der grösstmöglichen Priorität (dies ist erlaubt, weil die Steine ununterscheidbar sind). Mit dieser zusätlichen Regel kommen wir zu folgender Beobachtung:

Der Stein mit Priorität k kann erst dann bewegt werden, wenn auf seinem Feld kein Stein mit höherer Priorität liegt. Wenn wir Stein k also bewegen, dürfen zu diesem Zeitpunkt nicht mehr als k Steine auf seinem Feld liegen. Ergo darf Stein k in jedem Zug höchstens um k bewegt werden. Um ihn von Schüssel 0 in die Schüssel n zu bewegen, sind also insgesamt mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Züge notwendig. Da Sisyphus in jedem Zug nur einen Stein bewegen kann, dürfen wir die benötigten Züge für alle Steine aufsummieren und erhalten den gewünschten Ausdruck.

Marking scheme:

(a) 1P: Some kind of idea to fix the order in which the stones are moved

(b) 3P: Argue that each stone can be assigned a priority as above.

(c) 2P: The k-th stone is moved at least $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ times.

(d) 1P: Conclude.

5. Eine Gruppe von Kindern sitzt im Kreis. Am Anfang hat jedes Kind eine gerade Anzahl Bonbons. In jedem Schritt muss jedes Kind die Hälfte seiner Bonbons dem Kind zu seiner Rechten abgeben. Sollte ein Kind nach einem Schritt eine ungerade Anzahl Bonbons haben, bekommt es vom Kindergärtner ein zusätzliches Bonbon geschenkt. Zeige, dass nach einer endlichen Anzahl Schritten alle Kinder gleich viele Bonbons haben.

Erste Lösung: (David by Patrick): Der Vollständigkeit halber bemerken wir kurz, dass nach jedem Zug alle Kinder stets eine gerade Anzahl an Bonbons haben. Wir bezeichnen mit $2m_i$ die Anzahl Bonbons, die das Kind mit den wenigsten Bonbons vor dem i-ten Schritt hat und analog dazu $2M_i$ die Anzahl Bonbons, die das Kind mit den. meisten Bonbons vor dem i-ten Schritt hat. Offensichtlich gilt $2m_i \leq 2M_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Falls irgendwann Gleichheit gilt, haben alle Kinder gleich viele Bonbons und wir sind fertig.

Lemma: Es gilt $2m_{i+1} \geq 2m_i$ und $2M_{i+1} \leq 2M_i$.

Beweis: Im i-ten Schritt erhält jedes Kind mindestens m_i und höchstens M_i Bonbons von seinem linken Nachbar und behält selbst mindestens m_i und höchstens M_i Bonbons. Das allfällige Zusatzbonbon vom Kindergärtner ändert dabei fürs Maximum nichts, weil $2M_i$ gerade ist.

Wegen $M_i \geq m_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ und unserem Lemma müssen die beiden Folgen ab irgendeinem Zeitpunkt einen konstanten Wert annehmen. Seien M und m diese Werte. Falls $M = m$ gilt, sind wir fertig. Sei nun $M > m$. In jedem Schritt betrachten die Anzahl *trauriger* Kinder, die genau $2m$ Bonbons besitzen. Den Rest nennen wir *glücklich*. Da nach Annahme nicht alle Kinder traurig sind, gibt es ein trauriges Kind, dessen linker Nachbar mehr als $2m$ Bonbons besitzt. Dieses Kind ist nach dem nächsten Zug sicher glücklich, da es selbst m Bonbons behält und von seinem Nachbarn mehr als m Bonbons bekommt. Zudem kann ein glückliches Kind niemals traurig werden, weil es selbst mehr als m Bonbons behält und von seinem linken Nachbarn mindestens m Bonbons erhält. Somit verringert sich die Anzahl trauriger Kinder um mindestens eins. Das bedeutet aber, dass irgendwann alle Kinder glücklich sind und die minimale Anzahl Bonbons pro Kind grösser geworden ist. Dies ist ein Widerspruch zu m konstant! Also muss $M = m$ gelten.

Zweite Lösung: (David by Cyril) Sei n die Anzahl Kinder. Analog wie in der ersten Lösung zeigen wir, dass M_i monoton fallend ist. Da die Folge sicher nicht negativ werden kann, wird sie irgendwann konstant und wir nennen diesen Wert wieder M. Nun betrachten wir für jeden Zug zwei Fälle:

Fall 1: Die Anzahl Bonbons wird insgesamt grösser; damit wächst auch die durchschnittliche Anzahl Bonbons pro Kind um mindestens $\frac{1}{n}$ (eigentlich mehr, aber das ist hier egal).

Fall 2: Der Kindergärtner verteilt in dieser Runde kein zusätzliches Bonbon. In diesem Fall können wir analog zur ersten Lösung zeigen, dass die Anzahl Kinder, die genau $2M$ Bonbons besitzt, abnehmen muss.

Da die durchschnittliche Anzahl Bonbons nicht grösser werden kann als M, kann der erste Fall nicht unendlich oft eintreten. Sobald der erste Fall nicht mehr eintritt, zeigen wir analog zur ersten Lösung, dass auch der zweite Fall nicht beliebig oft eintreten kann, weil sonst irgendwann alle Kinder weniger als $2M$ Bonbons haben (falls nicht ohnehin schon alle Kinder gleich viele Bonbons haben).

Marking scheme (Erste Lösung):

(a) 1P: Bemerkung, dass M_i monoton fallend oder m_i monoton wachsend ist

(b) 1P: Beweis für diese Aussage(n)

(c) 4P: Beweis, dass das m_i strikt grösser wird, falls nicht alle Kinder gleichviele Bonbons haben

- davon 1P: Bemerkung / Idee, dass dies der Fall ist
- davon 1P: Betrachtung eines traurigen Kinds mit glücklichem linken Nachbar
- davon 1P: Beweis, dass die Anzahl trauriger Kinder 0 erreicht

(d) 1P: fertig machen

(e) -1P: Fehlende Begründungen etc.

(Zweite Lösung):

(f) 1P: Bemerkung, dass m_i monoton wachsend ist

(g) 1P: Begründung dafür

(h) 4P: Beweis, dass entweder der Durchschnitt grösser wird oder M_i kleiner.

- davon 1P: Idee für diese Fallunterscheidung
- davon 1P: Betrachtung eines Kindes mit $2M$ Bonbons, das einen linken Nachbarn mit weniger Bonbons hat
- davon 1P: Beweis, dass die Anzahl Kinder mit $2M$ Bonbons abnimmt

(i) 1P: fertig machen

(j) -1P: Fehlende Begründungen etc.

6. Zeige, dass keine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ existiert, sodass für alle ganzen Zahlen m, n gilt:

$$f(m + f(n)) = f(m) - n.$$

Lösung: (Paul) Wir nehmen an, dass die Funktionalgleichung eine Lösung hat und führen dies zu einem Widerspruch. Setzen wir $m = 0$ ein, dann erhalten wir die Gleichung

$$f(f(n)) = f(0) - n.$$

Daraus folgt sofort, dass f eine surjektive Funktion ist (f ist sogar bijektiv, das brauchen wir aber nicht für die Lösung). Also können wir ein $a \in \mathbb{Z}$ finden sodass $f(a) = 0$. Nun setzen wir $m = n = a$ ein, dies ergibt die Gleichung $0 = a$, woraus wir $f(0) = 0$ schliessen.

Die Gleichung oben wird dann zu $f(f(n)) = -n$. Jetzt ersetzen wir in der ursprünglichen Gleichung n durch $f(n)$ und m durch $m + n$. Dies ergibt

$$f(m) = f(m + n) - f(n)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Diese Funktionalgleichung hat die Lösungen $f(n) = f(1)n$ (siehe Beispiel 11). Dann gilt jedoch

$$-1 = f(f(1)) = f(1)^2,$$

der gewünschte Widerspruch.

Alternative: (Arnaud) On commence par poser $m = 0$ et on obtient de même que f est bijective. En posant à présent $n = 0$, on obtient $f(m+f(0)) = f(m)$ et donc, en utilisant l'injectivité pour simplifier par f, on obtient $f(0) = 0$.

Observer que l'égalité $f(m+f(0)) = f(m)$ implique que f est périodique de période $f(0)$. Comme f est bijective, elle ne peut pas être périodique, ce qui implique également $f(0) = 0$.

Il également possible de montrer directement que $f(f(n)) = -n$ (sans passer par $f(0) = 0$). Si on remplace n par $n + f(m)$, on obtient

$$-n = f(m) - (n + f(m)) = f(m + f(n + f(m))) = f(m + f(n) - m) = f(f(n)).$$

Marking scheme:

(a) $+3$P: $f(f(n)) = -n$ with maximum 2 **non-additive** partial points

- 1P: f is surjevctive (enough to get $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$) or f is injective or $f(0) \neq 0 \Rightarrow f$ periodic.
- 2P: $f(0) = 0$

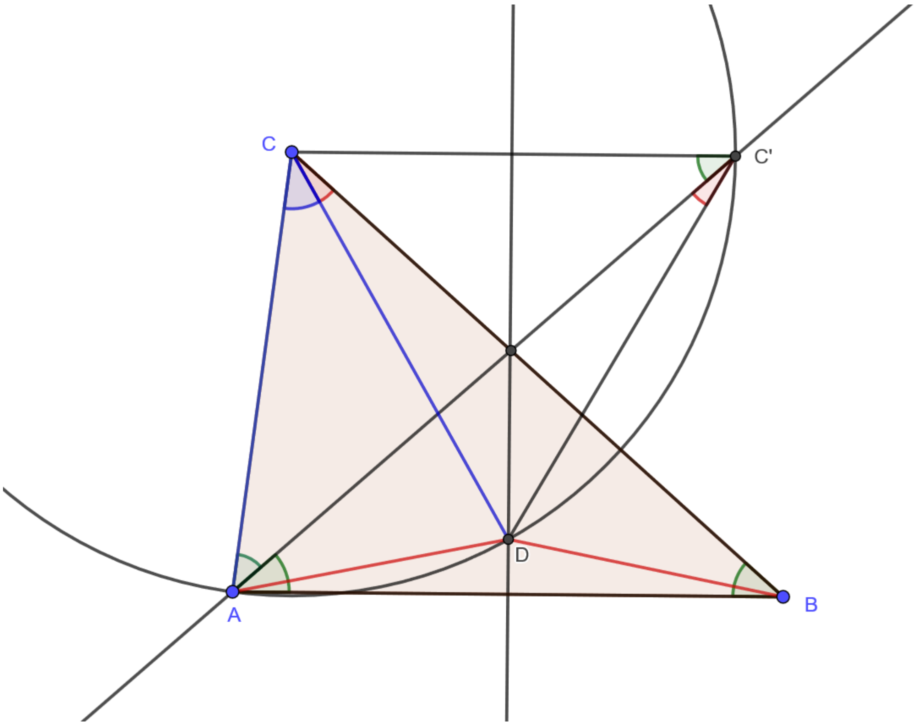
(b) $+3$P: $f(n) = nf(1)$ with maximum 2 **non-additive** partial points

- 1P: a first inductive step to get $f(n) = nf(1)$ (eg. $f(2m) = 2f(m)$)
- 2P: $f(m + n) = f(m) + f(n)$

(c) $+1$P: conclude

7. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC$. Nehme an, dass ein Punkt D im Inneren des Dreiecks ABC existiert, sodass $AD = BD$ und $CD = AC$. Zeige, dass $\angle ACB = 3 \cdot \angle DCB$.

Lösung: (David)



Wir wollen zunächst etwas mehr über die geometrische Situation dieser Aufgabe herausfinden: Damit $AD = BD$ gelten kann, muss D auf der Mittelsenkrechten von AB liegen.
Aus $CD = AC$ folgt, dass D auf einem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius AC liegt. Damit ist D der Schnittpunkt dieser beiden Objekte. Zudem suggeriert uns die Bedingung $\angle CAB = 2\angle ABC$, dass die Winkelhalbierende von $\angle CAB$ eine wichtige Rolle spielen könnte. Sei C' der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit dem Kreis mit Radius AC um C. Wegen $CA = CC'$ gilt

$$\angle AC'C = \angle CAC' = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle ABC.$$

Also sehen wir mit der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes, dass $ABC'C$ ein Sehnenviereck ist. Des weiteren wissen wir sogar, dass $\angle BAC' = \angle C'AC = \angle CC'A$ gilt. Folglich ist CC' parallel zu AB und damit $ABC'C$ ein gleichschenkliges Trapez.
Mit dieser Beobachtung können wir nun wieder die Mittelsenkrechte m von AB ins Spiel bringen: Sie ist nämlich die Symmetrieachse des Trapezes $ABC'C$. Da D auf der Symmetrieachse liegt, gilt $\angle BCD = \angle DC'A$. Das ist nützlich, weil C' auf unserem Kreis liegt. Wir müssen jetzt nur noch den Zentriwinkelsatz anwenden und sehen $\angle ACD = 2 \cdot \angle AC'D = 2 \cdot \angle DCB$, also

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = 2 \cdot \angle DCB + \angle DCB = 3 \cdot \angle DCB.$$

Note:(Arnaud) It's a beautiful geometry problem. Like David emphasized in his proof, you have to think big. Clearly, the initial configuartion is quite restricted (in the sense that the picture seems not complete). David suggested to complete the trapezoid with the point C'. You could also think even bigger and complete the isoceles triangle with base AB and C lying on one of the side. This basically kills the problem.

Marking Scheme:

- +1P: Dessiner C' et le nommer
- +2P: Définir C' et montrer un fait non-trivial sur C'. Ce fait peut par exemple être:
  - Montrer que C' est sur la bissectrice en A.
  - Montrer que C' est sur la parallèle à AB par C.
  - Montrer que C' est sur le cercle de rayon CA et de centre C.
  - Montrer que C' est sur le cercle circonscrit d'ABC.
  - Montrer que C' est sur la médiatrice de BC.
  - Montrer que C' est le symétrique de C par rapport à la médiatrice d'AB.
  - Montrer que CDC' forme un triangle équilatéral
  - Montrer que C' est le centre du cercle circonscrit de CDB

  On notera que cette liste est non-exhaustive, et que la non-trivialité de chacune de ces propositions dépendra de la définition que le participant aura faite de C'.
- +2P: Montrer que C' est sur le cercle de centre C par A et D ainsi que le symétrique de C par rapport à la médiatrice de AB.
- +2P: Conclure

8. On appelle un nombre naturel $n \geq 2$ *résistant* s'il est premier avec la somme de tous ses diviseurs (1 et n inclus). Quelle est la longueur maximale d'une suite de nombres résistants consécutifs ?

Réponse: La longueur maximale d'une telle suite est 5.

Solution: (Louis) Avant toute chose dans ce genre de problèmes il est important d'essayer les petites valeurs de n, en espérant que cela nous apporte des idées pour résoudre le problème. On constate que parmi les nombres entre 2 et 30 les nombres résistants sont 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29. On constate d'une part que parmi ces nombres la plus longue suite de nombre résistants consécutifs est la suite $2, 3, 4, 5$, de longueur 4. La longueur recherchée vaut donc au moins 4, et il faut déterminer s'il existe quelque part une suite plus longue. D'autre part il semble qu'il existe peu de nombre pairs résistants. Il est donc intéressant d'étudier les nombres pairs pour voir ce qu'il se passe exactement.

Pour qu'un nombre pair n soit résistant, il est nécessaire (mais pas suffisant) que la somme de ses diviseurs soit impaire. Clairement la somme des diviseurs de n est impaire si et seulement si n a un nombre impair de diviseurs impairs. On peut écrire $n = 2^k m$ avec m impair, et alors les diviseurs impairs de n sont les diviseurs de m. Il faut ainsi que m ait un nombre impair de diviseurs, autrement dit que m soit un carré parfait. Puisque 2^k est soit un carré parfait, soit le double d'un carré parfait, on trouve alors que pour qu'un nombre pair soit résistant il faut qu'il soit de la forme $n = s^2$ ou $n = 2s^2$.

Puisque les carrés parfaits sont plutôt rares parmi les nombres entiers on s'attend à ce qu'il soit difficile de trouver beaucoup de nombres pairs successifs qui soient résistants. Essayons de formaliser cette intuition:
Si n et $n+2$ sont deux nombres pairs résistants, ils doivent en particulier être tous deux de la forme s^2 ou $2s^2$.

- Si $n = s^2$ et $n + 2 = t^2$ on a $2 = t^2 - s^2 = (t - s)(t + s)$, mais comme les deux facteurs ont la même parité il est impossible que leur produit donne 2.
- Si $n = 2s^2$ et $n + 2 = 2t^2$ on obtient $2 = 2t^2 - 2s^2$, qu'on peut simplifier en $1 = t^2 - s^2 = (t - s)(t + s)$, la seule solution dans ce cas est $s = 0$, qui est impossible car $n \geq 2$.

Pour que n et $n + 2$ soient deux nombres pairs résistants il faut donc que l'un des deux soit de la forme s^2 et l'autre soit de la forme $2t^2$. Est-il possible que $n + 4$ soit aussi résistant? Par la remarque précédente il faut pour que ce soit le cas que n et $n + 4$ soient tous les deux des carrés parfaits ou qu'ils soient tous les deux le double d'un carré parfait.

- S'ils sont tous les deux des carrés parfaits on obtient $4 = t^2 - s^2 = (t - s)(t + s)$ et comme les deux facteurs ont la même parité on doit nécessairement avoir $(t - s) = (t + s) = 2$ et donc $s = 0$, ce qui est impossible.
- S'ils sont tous les deux le double d'un carré parfait on obtient $2 = t^2 - s^2$, et on a déjà prouvé plus haut que ce cas est impossible.

On remarque donc qu'il est impossible de trouver trois nombres pairs successifs qui soient tous résistants. On conclut donc qu'il ne peut exister aucune suite de longueur 6 ou plus.

Nous nous trouvons maintenant dans une situation fréquente, où l'on sait que la réponse est 4 ou 5, sans être encore capable de dire laquelle est la bonne réponse. À partir de là il y a deux manières de continuer le problème: soit on essaie de trouver une suite de longueur 5, soit un essaie de prouver qu'il n'existe aucune suite de longueur 5. Dans le cas présent, comme on a une condition assez forte sur la forme que doivent avoir les deux nombres pairs de la suite il est intéressant dans un premier temps de chercher une suite de longueur 5. Si on y parvient on a terminé le problème, et si on n'y parvient pas on peut essayer de trouver ce qui nous empêche de trouver une suite de longueur 5 pour soit restreindre davantage les valeurs étudiées soit essayer de démontrer que ce ne sera jamais possible.

Afin de trouver une telle suite il faut en premier lieu trouver deux nombres naturels a et b tels que $|a^2 - 2b^2| = 2$. Ceux qui connaissent l'équation de Pell peuvent utiliser la formule qui donnent toutes les solutions à l'équation écrite ci-dessus, mais il est également possible sans cela de procéder par force brute, en essayant juste tous les nombres pour trouver les premières paires (a, b) qui sont solution. Avant de commencer à chercher on peut encore constater que pour avoir une solution il faut que a soit pair et proche de $\sqrt{2}b$, ce qui réduit le nombre de paires à tester. Quelle que soit la méthode utilisée on trouve que les premières solutions (a, b) sont

$$(2, 1),\ (4, 3),\ (10, 7),\ (24, 17),\ (58, 41).$$

La dernière paire est déjà difficile à trouver si on ne connaît pas la formule de Pell, mais ce n'est pas important car en essayant les 4 premières paires on trouve que $(24, 17)$ donne la suite $575, 576, 577, 578, 579$ et un rapide calcul montre que ces 5 nombres sont tous résistants, ce qui conclut la preuve.

Marking Scheme:

- 2P: **Trouver (avec justification) une suite de nombres résistants de longueur** 5.
- 5P: **Établir que la longueur maximale vaut au plus** 5.
  - 2P: Trouver la condition nécessaire pour qu'un nombre pair soit résistant.
  - 2P: Trouver la condition nécessaire pour que deux nombres pairs successifs soit résistants.
  - 1P: Exclure le cas où 3 nombres pairs successifs sont résistants et conclure.

Points partiels et pénalités:

- 1P: Prouver une borne supérieure non optimale à la longueur de la suite.