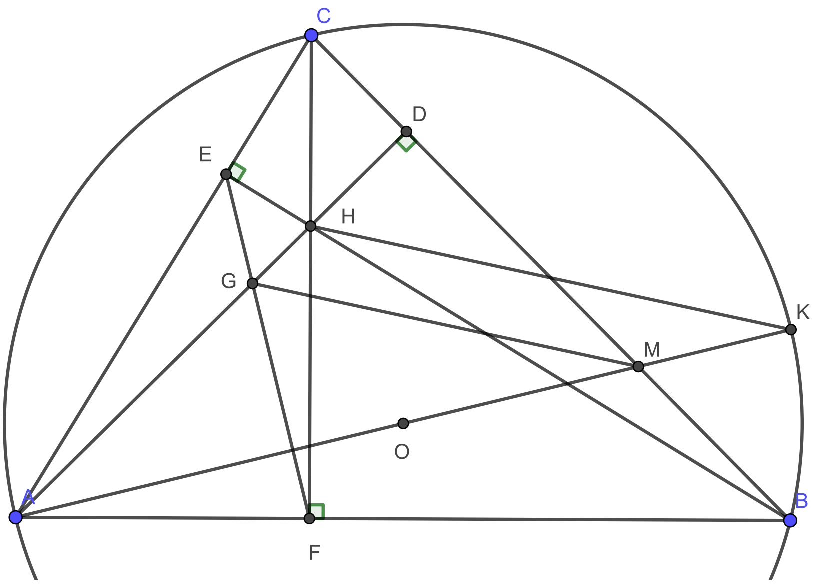
MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Selektion 2019 - MuLö

-

**Preliminary remark:** for every problem, up to 2 points can be deducted from a complete solution for (minor) flaws.

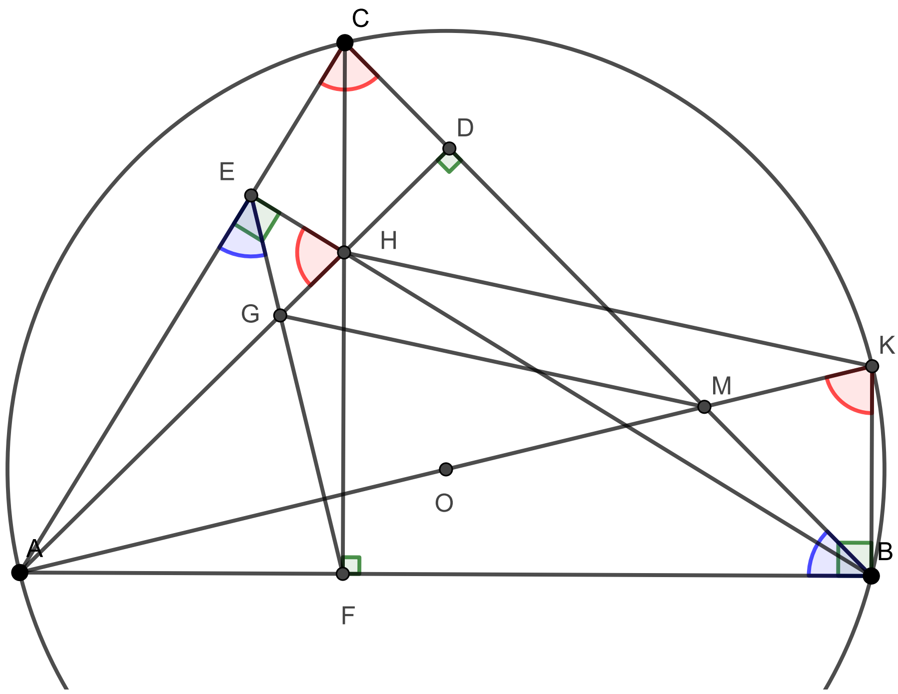
**1.** Sei $ABC$ ein Dreieck und seien $D$, $E$ und $F$ die Höhenfusspunkte der Höhen von $A$, $B$ respektive $C$. Sei $H$ der Höhenschnittpunkt von Dreieck $ABC$. Die Strecken $EF$ und $AD$ schneiden sich in $G$. Sei $K$ der Punkt auf dem Umkreis von Dreieck $ABC$, der diametral gegenüber von $A$ liegt. Die Gerade $AK$ schneide $BC$ in $M$. Zeige, dass die Geraden $GM$ und $HK$ parallel sind.




**1. Lösung:** (Cyril) Wir wollen $GM||HK$ zeigen. Wenn wir annehmen, dass das stimmt und das Ganze von $A$ aus betrachten, können wir das Dreieck $AMG$ zentrisch Strecken, sodass es auf $AKH$ landet. Dies bedeutet, dass wir $\frac{AG}{AH} = \frac{AM}{AK}$ hätten. Die Umkehrung stimmt nun aber auch: Wenn $\frac{AG}{AH} = \frac{AM}{AK}$ gilt, dann sind $GM$ und $HK$ parallel.

Wir wollen also zeigen, dass $\frac{AG}{AH} = \frac{AM}{AK}$ gilt. Dies ist ein Aussage über Verhältnisse, was uns nahelegen kann, dass wir ähnliche Dreiecke suchen sollten. Wenn wir in der Umgebung von $A, G, H$ und $A, M, K$ suchen, dann fällt uns vielleicht der Punkt $E$ und $B$ auf, der in einer sehr "ähnlichen"Lage ist. (wir könnten auch $F$ und $C$ nehmen)

Wir können nun folgende ähnliche Dreieck beweisen: $\triangle AEH \sim \triangle ABK$ und $\triangle EGH = \triangle BMK$. Dafür brauchen wir (i) $\angle AKB = \angle EHA$ und (ii) $\angle ABM = \angle GEA$ und (iii) $\angle KBA = \angle AEH$. (Überprüfe: wenn diese Winkel vorgegeben sind, gibt es nur eine Art, wie wir die Punkte konstruieren können)




(i) Wir haben $\angle AKB = \angle BCA$ durch das Sehnenviereck $ABKC$ und $\angle BCA = \angle EHA$ durch das Sehnenviereck $DCEH$

(ii) Wir bekommen $\angle ABM = \angle GEA$ direkt wenn wir das Sehnenviereck $BCEF$ betrachten

(iii) $\angle KBA = 90° = \angle AEH$ erhalten wir durch Definition des Höhenfusspunktes und $AK$ ein Durchmesser ist

Wir erhalten also $\triangle AEH \sim \triangle ABK$ und damit $\frac{AH}{AK} = \frac{EH}{BK}$. Weiter $\triangle EGH \sim \triangle BMK$ und somit $\frac{EH}{BK} = \frac{GH}{MK}$. Einer der Strahlensätze sagt uns daher, dass $GM || HK$.

**Marking scheme:**

- 1P: $GM||HK \iff \frac{AG}{AH} = \frac{AM}{AK}$
- 2P: Ähnliche Dreiecke finden (ohne Beweis)
- 1P: zwei Winkel in den ähnlichen Dreieck beweisen
- 1P: dritter Winkel beweisen
- 1P: Ähnliche Dreiecke $\Rightarrow \frac{AG}{AH} = \frac{AM}{AK}$
- 1P: fertig

**2.** Trouver le plus grand nombre premier $p$ tel qu'il existe des nombres entiers strictement positifs $a$ et $b$ tels que

$$p = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

**Première solution:** (Louis) La forme du problème semble indiquer qu'il faudra jouer avec des histoires de divisibilité. Dans de tels cas il est généralement utile de définir $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ et d'écrire ainsi $a = da'$, $b = db'$ avec $a', b'$ premiers entre eux. Cela nous permet alors de réécrire la formule comme

$$p = \frac{db'}{2}\sqrt{\frac{a'-b'}{a'+b'}}.$$

Maintenant pour avoir une solution il faut que le terme sous la racine carrée soit un carré parfait. Autrement dit, si on divise $a' - b'$ et $a' + b'$ par leur pgcd on devrait obtenir des carrés parfaits. Il est donc intéressant de s'intéresser encore à ce pgcd:

$$\mathrm{ggT}(a' - b', a' + b') = \mathrm{ggT}(a' - b', 2b') = \mathrm{ggT}(a' - b', 2).$$

Où la dernière égalité découle du fait que $b'$ est premier avec $a'$ et donc également avec $a' - b'$. Autrement dit le pgcd entre ces deux termes vaut soit 1, soit 2. On va traiter ces deux cas séparément:

Si le pgcd vaut 1, on a alors $a' - b' = r^2$ et $a' + b' = s^2$, et à partir de ces relations on obtient $2b' = s^2 - r^2$. De plus pour que le pgcd soit 1, on doit avoir que $a' - b', a' + b'$ sont tous les deux impairs, donc $r, s$ sont impairs. On peut alors réécrire le problème sous la forme

$$ps = \frac{d(s^2 - r^2)}{4} r = dr\frac{s-r}{2}\frac{s+r}{2}.$$

Puisque $s$ est premier avec $r$, il est aussi premier avec $s - r$ et $s + r$ donc il doit diviser $d$. Cela signifie alors que $p$ est divisible par $r\frac{s-r}{2}\frac{s+r}{2}$, ce qui est possible uniquement si $r = 1$, $s - r = 2$ et donc $s + r = 4$. Dans ce cas on obtient donc $p = 2$.

Si le pgcd vaut 2, on a dans ce cas $a' - b' = 2r^2$ et $a' + b' = 2s^2$, et on obtient $b' = s^2 - r^2 = (s - r)(s + r)$. De nouveau on peut réécrire le problème sous la forme

$$2ps = d(s - r)(s + r)r.$$

Comme précédemment on doit avoir que $s$ divise $d$, et donc $2p$ est divisible par $r(s - r)(s + r)$. Il y a trois cas à considérer:

- Si $r = s - r = 1$, alors $s + r = 3$ et donc on doit avoir $p = 3$.
- Si $r = 1$ et $s - r = 2$, on a $s + r = 4$ mais alors il faudrait que 4 divise $p$, ce qui est impossible.
- Si $r = 2$ et $s - r = 1$, on a alors $s + r = 5$ et donc $p = 5$.

Parmi tous ces cas, on voit que $p$ ne peut pas dépasser 5. Il reste encore à prouver qu'on peut atteindre 5. Pour cela il suffit de rembobiner depuis les conditions qui ont amené à cette valeur de 5 pour trouver qu'on peut atteindre 5 avec la paire $(a, b) = (39, 15)$.

**Zweite Lösung:** (David) Um das Problem besser angreifen zu können, quadrieren wir die Gleichung und formen um:

$$4p^2a + 4p^2b = ab^2 - b^3 \iff b^3 + 4p^2b = a(b^2 - 4p^2)$$

Insbesondere gilt $b > 2p$. Zudem sehen wir anhand dieser Gleichung, dass $a$ eigentlich ziemlich unnütz ist; Wir können nämlich einfach nach $a$ auflösen und erhalten die folgende Teilbarkeitsaussage, in der nur noch $b$ und $p$ vorkommen:

$$b^2 - 4p^2 \mid b^3 + 4p^2 b \iff b^2 - 4p^2 \mid 8p^2 b \iff (b-2p)(b+2p) \mid 8p^2 b$$

Wenn wir schreiben $k(b^2 - 4p^2) = 8p^2 b \iff kb^2 - 8p^2 b - 4kp^2 = 0$, erhalten wir eine quadratische Gleichung in $b$ mit Lösungen

$$b = \frac{8p^2 \pm \sqrt{64p^4 + 16kp^2k^2}}{2k} = \frac{4p^2 \pm 2p\sqrt{4p^2 + k^2}}{k}$$

Würde nun $k = mp$ gelten für eine natürliche Zahl $m$, so könnten wir die Gleichung schreiben als

$$\frac{4p^2 \pm 2p^2\sqrt{4 + m^2}}{mp}.$$

Da $4 + m^2$ aber für kein $m \in \mathbb{N}$ ein Quadrat ist, steht das im Widerspruch zu $b \in \mathbb{N}$. Somit ist $k$ nicht durch $p$ teilbar. Dann folgt aber aus unserer ursprünglichen Gleichung für $b$, dass $b$ durch $p$ teilbar sein muss! Wir schreiben $b = lp$ und gehen zurück zu unserer Teilbarkeitsaussage:

$$(b-2p)(b+2p) \mid 8p^2 b \iff p^2(l-2)(l+2) \mid 8p^3 l \iff (l-2)(l+2) \mid 8pl$$

Nun gilt $\mathrm{ggT}(l-2, l+2) \mid 4$, also muss für $p > 2$ mindestens eine der Zahlen $l-2$ und $l+2$ ein Teiler von $8l$ sein. Mit

$$l - 2 \mid 8l \iff l - 2 \mid 16, \qquad l + 2 \mid 8l \iff l + 2 \mid 16$$

und mit $l > 2$ erhalten wir $l \in \{3, 4, 6, 10, 14, 18\}$. Eine sorgfältige Untersuchung dieser Fälle mithilfe der Primfaktoren von $(l-2)(l+2)$ liefert das grösstmögliche $p = 5$ für $l = 3$. Wir erhalten für $p = 5$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung, nämlich $(a, b, p) = (39, 15, 5)$.

**Marking scheme:** Dans chacune des trois solutions, une solution complète où on oublie de vérifier qu'on peut atteindre la valeur $p = 5$ sera pénalisée d'un point.

(a) Première solution:

- 1P: Exprimer $a - b = \lambda r^2$, $a + b = \lambda s^2$ pour un certain entier $\lambda$.
- 1P: Déterminer que $\lambda$ vaut soit $d$, soit $2d$.
- 1P: Déterminer que $s$ divise $d$.
- 1P: Se ramener à un nombre fini de cas à étudier (par exemple en utilisant que $p$ ou $2p$ est un produit de trois termes.
- $2 \times$ 1P: Terminer chacun des deux cas $\lambda = d$ et $\lambda = 2d$.

Si le deuxième point n'est pas obtenu, il est quand même possible d'obtenir des points pour les étapes suivantes si des résultats similaires sont obtenus.

(b) Deuxième solution:

- 2P: Find the relation $b^2 - 4p^2 \mid 8p^2 b$.
  - 1P: Find the relation $b^2 - 4p^2 \mid b^3 + 4p^2 b$.
- 3P: Deduce $p \mid b$.
  - 1P: Apply the formula for the roots of the quadratic equation in $b$.
  - 1P: Deduce that $4p^2 + k^2$ must be a square.
- 2P: Conclude.
  - 1P: Reduce the problem to finitely many cases to consider.

**3.** Let $S$ be a nonempty set of positive integers. Prove that at least one of the following two assertions holds:

(i) There exist distinct finite nonempty subsets $F$ and $G$ of $S$ such that

$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x}=\sum_{x\in G}\frac{1}{x}.$$

(ii) There exists a positive rational number $r<1$ such that for all finite nonempty subsets $F$ of $S$ it holds that

$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\neq r.$$

**Première solution:** (Arnaud) On doit montrer qu'au moins une des deux conditions est vérifiées, on va donc supposer que les deux sont fausses et essayer d'aboutir à une contradiction.

Remarquez tout d'abord que la condition (i) se lit comme une condition de "non-injectivité"(si l'on considérait la fonction définie sur l'ensemble des sous-ensembles finis de $S$ vers les nombres rationnels positifs). La condition (ii) s'apparente à une condition de non-surjectivité vers $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. Autrement dit, avec notre hypothèse absurde, on supposer que pour tout rationnel $r\in(0,1)$, il existe un unique sous-ensemble fini $F_r\subset S$ tel que $r$ est la somme des inverses des éléments de $F_r$.

En particulier, s'il on a $r,s\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ tels qu'il existe $x\in S$ avec $r=s+1/x$, alors soit $x\notin F_s$ et forcément $F_r=F_s\cup\{x\}$ (par unicité), ou simplement $x$ se trouve déjà dans $F_s$, et alors $x\notin F_r$, sinon $F_s$ s'obtiendrait par $F_s=F_r\setminus\{x\}$. Autrement dit,

$$x\notin F_s\Leftrightarrow x\in F_r=F_{s+1/x}.$$

Cette relation fait pressentir un certain phénomène d'alternance. Plus précisément, prenons $r\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ et $x\in S$. Soit $n$ le plus grand entier tel que $r-n/x>0$ (autrement dit $n=\lfloor rx\rfloor$). Certainement, $r-n/x<1/x$, par définition de $n$. Donc $x\notin F_{r-n/x}$. L'observation ci-dessus nous donne la relation d'alternance suivante:

$$x\notin F_{r-n/x}\Rightarrow x\in F_{r-(n-1)/x}\Rightarrow x\notin F_{r-(n-2)/x}\Rightarrow\dots$$

Au final, en remontant jusqu'à $r$, on observe que $x\in F_r$ si et seulement si $n$ est impair.

La dernière étape de l'argument est la plus subtile. Jusqu'ici, il s'agissait essentiellement d'observer les caractéristiques principales du problèmes. Considérons $F_{2/3}$. L'argument précédent nous donne, si $x\in F_{2/3}$, alors $\lfloor 2x/3\rfloor$ est un nombre impair. En particulier, et là est la subtile observation de la preuve, le nombre $2x/3$ n'est pas entier ! (sinon il serait pair). En particulier, on peut trouver $q_x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ tel que $\lfloor 2x/3\rfloor=\lfloor x(2/3-q_x)\rfloor$. Comme $F_{2/3}$ est fini, on peut prendre $\varepsilon=\min_{x\in F_{2/3}}q_x$ et on obtient que $\lfloor 2x/3\rfloor=\lfloor x(2/3-\varepsilon)\rfloor$ pour tout $x\in F_{2/3}$.

La contradiction suit de l'observation suivante:

$$x\in F_{2/3}\Rightarrow\lfloor 2x/3\rfloor\text{ odd }\Rightarrow\lfloor x(2/3-\varepsilon)\rfloor\text{ odd }\Rightarrow x\in F_{2/3-\varepsilon},$$

donc $F_{2/3}\subset F_{2/3-\varepsilon}$. Contradiction.

**Zweite Lösung:** (David) Wie in der ersten Lösung nehmen wir an, dass eine Menge $S$ existiert, die weder (i) noch (ii) erfüllt und halten fest, dass somit für jedes $r\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ eine eindeutige endliche Teilmenge $F_r\subset S$ existiert, die

$$\sum_{x\in F_r}\frac{1}{x}=r$$

erfüllt. Wir bemerken zudem die folgenden beiden grundlegenden Punkte:

- Für alle $r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ gilt $1 \notin F_r$. Deshalb dürfen wir oBdA $1 \notin S$ annehmen.
- Die Menge S muss unendlich sein. Sonst gäbe es nur endlich viele Möglichkeiten, eine endliche Teilmenge auszuwählen und somit auch nur endlich viele Zahlen, die wir darstellen können.

Wir schreiben also $S = \{s_1 < s_2 < s_3 < \ldots\}$. Betrachte für ein beliebiges $s_k \in S$ die Mengen $A_k = (0, \frac{1}{s_k}) \cap \mathbb{Q}$ und $B_k = (\frac{1}{s_k}, \frac{2}{s_k}) \cap \mathbb{Q}$. Dann wissen wir, dass für jedes $a \in A_k$ gilt $s_k \notin F_a$. Analog wie in der ersten Lösung schliessen wir daraus mithilfe der Eindeutigkeit von $F_b$, dass für jedes $b \in B_k$ gilt $s_k \in F_b$.

Nun gilt: Falls $B_k \cap B_{k+1}$ nichtleer ist, gibt es ein $r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ mit $s_k \in F_r, s_{k+1} \in F_r$. Wegen $\frac{1}{s_k} + \frac{1}{s_{k+1}} > \frac{2}{s_{k+1}} > r$ führt das zu einem Widerspruch. Also ist $B_k \cap B_{k+1}$ leer, oder mit anderen Worten gilt für jedes $k$ die Ungleichung $\frac{2}{s_{k+1}} \leq \frac{1}{s_k} \iff s_{k+1} \geq 2s_k$ und somit induktiv $s_k \geq 2^{k-1}s_1$. Nun können wir folgende Abschätzung machen:

$$\sum_{x \in S} \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}s_1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Wenn wir also in irgendeinem Schritt strikte Ungleichheit hätten, gäbe es wegen

$$\sum_{x \in F} \frac{1}{x} < \sum_{x \in S} \frac{1}{x} < 1$$

einige rationale Zahlen sehr nahe bei 1, für die es keine Menge $F$ gibt, Widerspruch!
Wenn jedoch in jedem Schritt Gleichheit gilt, dann wissen wir auch, dass $a_1 = 2$ und $a_{k+1} = 2a_k$ gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$. Also gilt $S = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$. Nun können wir aber offensichtlich keine endliche Teilmenge von $S$ finden, die $1/3$ erzeugt, da die Binärdarstellung von $1/3$ unendlich viele Einsen enthält. Auch ein Widerspruch! Dies beendet den Beweis.

**Marking scheme:**

(a) Première solution (Arnaud):

- reformulate the problem by looking for contradiction assuming "bijectivity": 0P.
- $x \notin F_s \Leftrightarrow x \in F_{s+1/x}$: 1P.
- relation d'alternance: 1P.
- $x \in F_r$ si et seulement si $\lfloor rx \rfloor$ est impair: 2P.
- concluding the proof (analytical argument): 3P.

(b) Zweite Lösung (David):

- Für alle $b \in B_k$ gilt $s_k \in F_b$ : 2P.
- Die Idee, ein $r \in B_k \cap B_{k+1} \cap \mathbb{Q}$ zu betrachten: 1P.
- $s_{k+1} \geq 2s_k$: 1P.
- $s_{k+1} \geq 2^k s_1$: 1P.
- $s_{k+1} = 2s_k$: 1P.
- Widerspruch herbeiführen: 1P.

**4.** Let $p$ be a prime. Determine all polynomials $P$ with integer coefficients satisfying the following two conditions:

(i) $P(x) > x$ for all positive integers $x$.

(ii) If the sequence $(p_n)_{n\geq 0}$ is defined by $p_0 := p$ and $p_{n+1} := P(p_n)$ for every $n \geq 0$, then for every positive integer $m$, there exists $l \geq 0$ such that $m$ divides $p_l$.

**Réponse:** Il y a deux polynômes $P \in \mathbb{Z}[x]$ qui satisfont les conditions (i) et (ii), à savoir $P(x) = x + 1$ et $P(x) = x + p$.

**Première solution:** (Arnaud) Tout d'abord, on montre que le polynôme $P(x) = x + 1$ satisfait les conditions (i) et (ii). La condition (i) est trivialement satisfaite. Par induction, on trouve que $p_n = p + n$. Ainsi, étant donné $m$, on choisit un entier $k$ tel que $km > p$ et on vérifie que $m \,|\, p_{km-p}$.

Quant au polynôme $P(x) = x + p$, on obtient $p_n = p + np = p(n+1)$ et ainsi $m \,|\, p_{m-1}$ pour tout $m > 1$.

Soit maintenant un polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$ qui satisfait les conditions (i) et (ii). On va montrer que $P(x) \equiv x + 1$ ou $P(x) \equiv x + p$. La condition (i) implique que $p_{n+1} = P(p_n) > p_n$ et donc la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Le trick est évidement d'appliquer la fameuse relation $a - b \,|\, P(a) - P(b)$. Si l'on considère la différence $m = p_n - p_{n-1}$, alors il existe $l$ tel que $p_n - p_{n-1} \,|\, p_l$. On distingue à présent plusieurs cas.

(a) Si $l \leq n - 1$, alors $p_n - p_{n-1} \leq p_l \leq p_{n-1}$ et donc $p_n \leq 2p_{n-1}$.

(b) Si $l = n$, alors $p_n - p_{n-1} \,|\, p_n$ implique $p_n - p_{n-1} \,|\, p_{n-1}$ et on obtient la même relation.

(c) Si $l > n$, alors, en appliquant $a - b \,|\, P(a) - P(b)$, on obtient

$$p_n - p_{n-1} \,|\, P(p_n) - P(p_{n-1}) = p_{n+1} - p_n \,|\, \ldots \,|\, p_l - p_{l-1}.$$

Comme $p_n - p_{n-1} \,|\, p_l$, il s'en suit que $p_n - p_{n-1} \,|\, p_{l-1}$. En répétant le processus $(l - n)$ fois, on obtient finalement $p_n - p_{n-1} \,|\, p_n$ et on se retrouve au cas (b).

En conclusion, on a montré que

$$p_n \leq 2p_{n-1}, \forall n \geq 0.$$

Autrement dit, le polynôme $P$ satisfait la relation $P(x) \leq 2x$ pour les valeurs de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$. Donc $x < P(x) \leq 2x$ pour ces mêmes valeurs, or la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers et donc divergente. Le polynôme $P$ est donc de degré 1, car borné par les droites $y = x$ et $y = 2x$ pour une infinité de valeurs arbitrairement grandes. Le graphe de $P$ est donc une droite qui se situent au-dessus des points $(n; n)$ pour $n \geq 1$ et en-dessous des points $(p_n; 2p_n)$ pour $n \geq 0$. Il s'en suit que le coefficient dominant de $P$ est soit 1, soit 2, autrement dit $P(x) = ax + b$ avec $a \in \{1, 2\}$.

Si $a = 2$, alors $b \leq 0$, car $P(p_n) \leq 2p_n$ et $b > -1$, car $P(1) > 1$. Donc $b = 0$ et $P(x) = 2x$. Ainsi $p_n = 2^n p$ et la condition (ii) n'est pas satisfaite.

On doit donc avoir $a = 1$ et ainsi $b \geq 1$, car $P(1) > 1$. Si $b = 1$, alors $P(x) = x + 1$ est une solution. Supposons $b \geq 2$. On a $p_n = p + bn$ et donc en appliquant la condition (ii) pour $m = b$, on en déduit $b \,|\, p$ et donc $b = p$. Le polynôme $P(x) = x + p$ est aussi solution et on a terminé.

**Deuxième solution:** (Louis) Après quelques essais on remarque que $P(x) = x+1$ et $P(x) = x+p$ sont tous les deux des solutions. En particulier, il semble que $P(x) - x$ soit constant. On va donc essayer de prouver cette propriété. Comme dans la première solution on constate facilement que la suite $(p_k)_{k\geq 0}$ est strictement croissante et on va également utiliser la relation $a-b|P(a)-P(b)$.

En utilisant la relation citée précédemment on obtient que $p_k - p_{k-1} \,|\, P(p_k) - P(p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$. Il existe deux manières de généraliser cette relation de divisibilité: d'une part on obtient par induction que $p_k - p_{k-1}$ divise $p_l - p_{l-1}$ pour tout $l > k$, et d'autre part que $p_k - p_{k-1}$ divise $p_l - p_{k-1}$ pour tout $l \geq k$ (car $p_k - p_{k-1}$ divise $p_l - p_{l-1}$ et $p_{l-1} - p_{k-1}$). On aura également besoin de la relation

$$p_k - p_0 \,|\, p_{mk+i} - p_i.$$

pour tout $m \geq 1$ et $i \leq k$. Cette relation se démontre de la même manière que la précédente.

On aimerait pouvoir prouver que le polynôme $P(x) - x$ est constant. Supposons donc par l'absurde qu'il ne le soit pas. Il s'ensuit alors que l'expression $m_k = p_k - p_{k-1}$ prend une infinité de valeurs différentes. Or, il existe un nombre $n$ tel que $nm_k$ ne divise aucun des $p_i$ avec $i < k$. Il doit alors exister un $l \geq k$ tel que $nm_k \,|\, p_l$, et alors puisque $m_k \,|\, p_l - p_{k-1}$ il s'ensuit que $m_k \,|\, p_{k-1}$ et donc également $m_k \,|\, p_k = P(p_{k-1})$. Or, de ces deux relations on déduit que $m_k \,|\, a_0 = P(0)$. Ainsi, puisque $m_k$ prend une infinité de valeurs, il s'ensuit que $P(0) = 0$. À partir de là on prouve par induction que tous les $p_i$ sont divisibles par $p$. On sait donc que $p_1$ est divisible par $p$ et $p_1 > p$. Si $p_1 > 2p$, alors il existe un $k > 1$ tel que $p_1 - p = kp$. Comme fait précédemment on en déduit que $kp \,|\, p$, une contradiction. On a donc $p_1 = 2p$, et puisqu'on suppose que $p_{i+1} - p_i$ il existe un $k$ minimal tel que $p_{k+1} - p_k \neq p$. Par les résultats prouvés précédemment on obtient que $p_{k+1} - p > p_k > p_{k-1} > ....$ Or, puisque $p_{k+1} - p \,|\, p_{m(k+1)+i} - p_i$ pour tout $m \geq 1, 0 \leq i \leq k$, on prouve comme précédemment qu'il doit exister un $i$ tel que $p_{k+1} - p \,|\, p_i$, ce qui contredit $p_{k+1} - p < p_i$.

On conclut de tout ce paragraphe que l'hypothèse que $P(x) - x$ est non constant amène une contradiction, autrement dit le polynôme $P(x) - x$ est forcément le polynôme constant et donc on peut écrire $P(x) = x + b$ et il ne reste plus qu'à trouver les valeurs possibles pour $b$. On fait une dernière fois le même raisonnement que précédemment pour trouver que $b = P(p) - p = p_1 - p \,|\, p_l - p$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et donc que $b \,|\, p$, autrement dit $b = 1$ ou $b = p$. On a déjà trouvé que ces deux polynômes sont effectivement des solutions et donc ce sont les seules.

**Marking scheme:**

**Remark**: A complete solution is worth 7P. A complete solution where a verification that either $P(x) = x + 1$ or $P(x) = x + p$ is indeed a solution is worth 6P.

(a) Première Solution:

- 1P (not additive with any other points): Finding the two solutions and verifying that they are solutions.
- 1P: A relation of the type $p_{k+1} - p_k \mid p_{k+2} - p_k$ or $p_1 - p_0 \mid p_n - p_0$.
- 1P: $p_{k+1} - p_k \mid p_n - p_k$ for all $n > k$.
- 1P: $p_{i+1} - p_i \mid p_i$ (or similar) for all $i \geq 0$.
- 2P: Concluding $P(x) = ax + b$ with $a \in \{1, 2\}$.
- 1P: $P$ is of the form $P(x) = x + b$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- 1P: Finishing the proof assuming $P$ has the above form.

(b) Deuxième Solution:

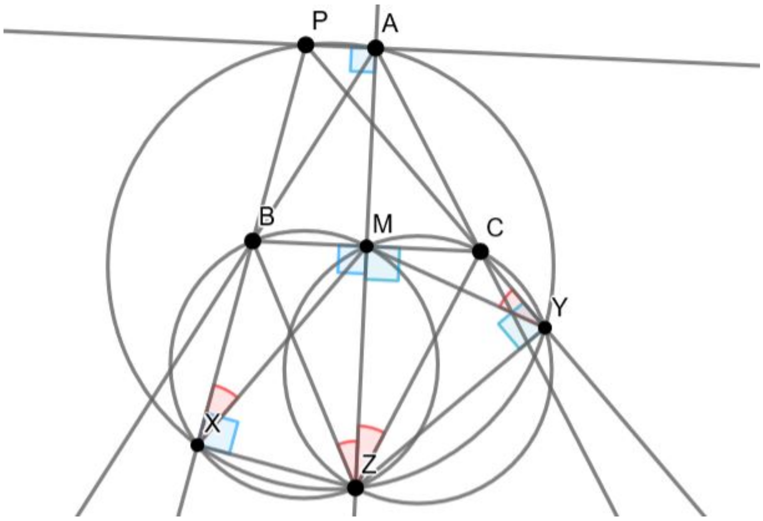
- 1P (not additive with any other points): Finding the two solutions and verifying that they are solutions.
- 1P: A relation of the type $p_{k+1} - p_k \mid p_{k+2} - p_k$ or $p_1 - p_0 \mid p_n - p_0$.
- 1P: $p_{k+1} - p_k \mid p_n - p_k$ for all $n > k$.
- 1P: $p_{i+1} - p_i \mid p_i$ (or similar) for all $i \geq 0$.
- 1P: Showing $P(0) = 0$ if one assumes that $P(x) - x$ is not constant.
- 2P: Deriving a contradiction so that $P(x) - x$ is constant.
- 1P: Finishing by finding the value of $P(x) - x = P(0)$.

**5.** Sei $ABC$ ein Dreieck mit $AB = AC$ und sei $M$ der Mittelpunkt der Strecke $BC$. Sei $P$ ein Punkt, sodass $PB < PC$ gilt und $PA$ parallel zu $BC$ ist. Ferner seien $X$ und $Y$ Punkte auf den Geraden $PB$ respektive $PC$, sodass $B$ auf der Strecke $PX$ und $C$ auf der Strecke $PY$ liegt und $\angle PXM = \angle PYM$ gilt. Zeige, dass $APXY$ ein Sehnenviereck ist.

**Erste Lösung:** (Patrick by David): Wir führen den Punkt $Z$ ein, der der zweite Schnittpunkt der Kreise durch $MCY$ und $MXB$ ist. Mit Winkeljagd folgt nun, $\angle MZC = \angle MYC = \angle MXB = \angle MZB$. Somit liegt M auf der Mittelsenkrechten von $BC$. Folglich gilt

$$\angle ZXP = \angle ZXB = \angle ZMB = \angle ZMC = \angle ZYC == \angle ZYP = 90^\circ = \angle ZAP.$$

Die Punkte $A$,$X$,$Y$ liegen somit auf einem Kreis mit Durchmesser $PZ$. Somit ist $PAXY$ ein Sehnenviereck.




**Marking scheme (Erste Lösung):**

- 3P: Einführung des Punktes $Z$ als Schnittpunkt der beiden Kreise
- 1P: Feststellung, dass $ZBC$ein gleichschenkliges Dreieck ist.
- 1P: Feststellung, dass $Z$ auf $AM$ liegt.
- 2P: Schlussfolgern, dass $ZXYPA$ auf einem Kreis liegen.
  - 1P: Folgern, dass $P, Z$ mit zwei der anderen drei Punkten auf einem Kreis liegen

**6.** Let $(a, b)$ be a pair of positive integers. Henning and Paul are playing a game: Initially, there are two piles of $a$ and $b$ stones, respectively, on a table. The pair $(a, b)$ is called the *initial configuration* of the game. The players proceed as follows:

- The players alternate and Henning begins.
- In each turn, a player either removes a positive number of stones from one of the two piles or the same positive number of stones from both piles.
- The player who removes the last stone from the table wins the game.

Let $A$ be the set of all positive integers $a$ for which there exists a positive integer $b < a$ such that Paul has a winning strategy for the initial configuration $(a, b)$. Order the elements of $A$ increasingly as $a_1 < a_2 < \dots$.

(a) Prove that the set $A$ is infinite.

(b) Prove that the sequence $(m_k)_{k\geq 1}$ defined by $m_k := a_{k+1} - a_k$ for all $k \geq 1$ is not eventually periodic.

*Remark*: A sequence $(x_k)_{k\geq 1}$ is *eventually periodic* if there exists an integer $k_0 \geq 0$ such that the sequence $(x_{k+k_0})_{k\geq 1}$ is periodic.

**Erste Lösung:** (David, by Patrick)

(a) Wir nennen ein allgemeines Paar von Startwerten $(a, b)$ *gut*, falls Paul dafür eine Gewinnstrategie besitzt. Hier erlauben wir der Vollständigkeit halber auch $a = 0$ oder $b = 0$ und nennen $(0, 0)$ auch gut. Analog nennen wir alle Paare, die nicht gut sind, *schlecht* und bemerken, dass für diese Startwerte Henning offenbar eine Gewinnstrategie besitzt. Wir benutzen das folgende allgemeine Prinzip:

    Wenn $(a, b)$ gut ist, dann sind $(a + n, b)$, $(a, b + n)$, $(a + n, b + n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ schlecht, da Henning in seinem ersten Zug einfach die Werte $(a, b)$ erreichen könnte und dann Paul ein neues Spiel beginnen muss mit Startwerten, die nun für Henning gut sind. Also gibt es für jedes $a$ höchstens ein $b$, sodass $(a, b)$ gut ist.
    Zudem gilt: Falls Henning für die Startwerte $(a, b)$ in seinem ersten Zug nur schlechte Werte erreichen kann, ist $(a, b)$ gut, weil Paul dann unabhängig von Hennings Zug nach obiger Bemerkung eine Gewinnstrategie hat.

    Nehme nun an, dass $A$ nur endlich viele Elemente hat. Dann gibt es auch nur endlich viele gute Startwerte (denn für jedes gute Feld gibt es nach obigem Prinzip und wegen $(a, b)$ gut $\iff$ $(b, a)$ gut genau ein Element aus $A$, nämlich der kleinere der beiden Startwerte). Insbesondere gibt es eine Zahl $C$ die strikt grösser ist als alle $a, b$ mit $(a, b)$ gut. Dann gilt allerdings für $(C, 2C)$, dass die Paare $(C - n, 2C)$ $(C - n, 2C - n)$ für jedes $n \in \{1, 2, \dots, C\}$ und $(C, 2C - m)$ für jedes $m \in \{1, 2, \dots, 2C\}$ schlecht sind, nach Konstruktion von $C$, also ist $(C, 2C)$ gut. Widerspruch!

(b) Wir wollen nun erst einmal zeigen, dass jede natürliche Zahl entweder in $A$ oder in $B = \{b_k \mid (a_k, b_k) \text{ gut}\}$ vorkommt. Was wir in Teilaufgabe (a) herausgefunden haben impliziert, dass eine natürliche Zahl nicht in beiden Mengen vorkommen kann. Nehme nun an, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n$ weder in $A$ noch in $B$ auftritt und wähle $n$ minimal. Mit anderen Worten ist für alle Zahlen $m \in \mathbb{N}$ das Paar $(m, n)$ schlecht. Das bedeutet aber auch, dass für jedes $m$ eines der Paare $(m, n-1), (m, n-2), \dots, (m, 0), (m-1, n-1), (m-2, n-2) \dots (m - \min\{m, n\}, n - \min\{m, n\})$ gut ist. Betrachten wir beispielsweise $m = n + 1,\ 2n + 1,\ 3n + 1,\ \dots (n + 1)n + 1$, so sind alle diese Tupel paarweise verschieden.

Wir erhalten also mit unserer Annahme $n+1$ verschiedene gute Paare, die alle von der Form $(x, y)$ sind mit $y \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dann müssten allerdings nach Schubfachprinzip zwei $y$ den gleichen Wert annehmen, was unserem Zwischenresultat aus (a) widerspricht. Somit wissen wir also $A \sqcup B = \mathbb{N}$

Der nächste Schritt besteht darin zu zeigen, dass $a_k - b_k = k$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und dass jeweils $b_k = \min(\mathbb{N} \backslash \{a_1, \ldots a_{k-1}, b_1, \ldots, b_{k-1}\})$ gilt. Das findet man leicht durch Ausprobieren und lässt sich mit Induktion beweisen.

- Verankerung: Offensichtlich sind $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ und $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ die ersten guten Paare und erfüllen die Aussage.

- Nehme nun an, die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ erfüllen die Aussage. Nun setzen wir $b_{n+1} = \min(\mathbb{N} \backslash \{a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_n\})$. Weil nach Induktionsannahme $b_k < b_{n+1}$ gilt für alle $k \leq n$, gilt für $b_{n+1} + n + 1$ auch $b_{n+1} + n + 1 > b_k + k = a_k$ für alle $k \leq n$. Insbesondere können wir einmal $a_{n+1} = b_{n+1} + n + 1$ setzen, denn dieses ist noch nicht in der Menge $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ enthalten. Es bleibt zu zeigen, dass das Paar $(a_{n+1}, b_{n+1})$ tatsächlich gut ist. Dafür unterscheiden wir die folgenden Möglichkeiten für Hennings ersten Zug mit Startwerten $(a_{n+1}, b_{n+1})$:
  Wenn Henning nur den Stapel mit $b_{n+1}$ Münzen verkleinert, erreicht er nach Konstruktion eine Anzahl Münzen, die bereits in der Menge $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ liegt. In jedem Fall kann Paul nun durch Verkleinern des Stapels mit $a_{n+1}$ Münzen ein gutes Paar erreichen, denn es gilt $a_{n+1} > a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
  Wenn Henning beide Stapel verkleinert, ist der Stapel mit ursprünglich $b_{n+1}$ Münzen auf eine Anzahl in $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ geschrumpft. Falls es ein $a_k$ ist, kann Paul den anderen Stapel natürlich auf $b_k$ Münzen reduzieren wegen $a_{n+1} - x > b_{n+1} - x = a_k \geq b_k$. Falls es ein $b_k$ ist, kann Paul den anderen Stapel auf $a_k$ Münzen reduzieren wegen $a_k = b_k + k < b_k + n + 1 = (b_{n+1} - x) + n + 1 = a_{n+1} - x$.
  Verkleinert Henning nur den Stapel mit $a_{n+1}$ auf $x$ Münzen, gibt es wieder einige Möglichkeiten:
  Falls $x \geq b_{n+1}$ gilt, hat Henning die Differenz der beiden Stapel verkleinert. Wegen $b_{n+1} > b_k$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, erreicht Paul durch Entfernen einer geeigneten Anzahl Münzen von beiden Stapeln das Paar mit der neuen Differenz.
  Falls $x < b_{n+1}$ gilt, dann gilt entweder $x = a_k$ oder $x = b_k$ für ein $k \leq n$. Falls $x = a_k$ gilt, dann gilt $b_k \leq a_k < b_{n+1}$, also kann Paul durch Verkleinern des Stapels mit $b_{n+1}$ Münzen das gute Paar $(a_k, b_k)$ erreichen. Falls $x = b_k$ gilt, dann unterscheiden wir noch einmal zwei Fälle: Entweder es gilt $a_k = b_k + k < b_{n+1}$; in diesem Fall verkleinert Paul den Stapel mit $b_{n+1}$ Münzen, um das gute Paar $(a_k, b_k)$ zu erreichen, oder aber es gilt $a_k = b_k + k > b_{n+1}$ (beachte, dass $a_k = b_{n+1}$ nach Konstruktion von $b_{n+1}$ nicht auftreten kann). In diesem Fall gilt $b_{n+1} - x < a_k - x = a_k - b_k = k$. Also ist die Differenz von $x$ und $b_{n+1}$ kleiner als $k$ und Paul kann durch Entfernen einer geeigneten Anzahl Münzen das gute Paar mit dieser Differenz erreichen.

  Das sind alle möglichen Fälle. Somit haben wir gezeigt, dass auch $(a_{n+1}, b_{n+1})$ gut ist.

Nun verwenden wir alle diese Erkenntnisse, um zu zeigen, dass die Folge $(m_k)_{k \geq 1}$ niemals periodisch werden kann:
Nehme an, die Folge $(m_k)_{k \geq K}$ sei periodisch mit Periode $c \geq 1$. Wir definieren uns $d = a_{K+c} - a_K$ und bemerken (induktiv), dass $a_{k+nc} = a_k + nd$ gilt für alle $k \geq K$ und $n \in \mathbb{N}$. Zudem gilt $d > c$, weil sonst aufgrund der Periodizität jede natürliche Zahl grösser als $K$ in

der Menge $A$ enthalten wäre und somit die Menge $B$ endlich wäre, was offensichtlich absurd ist. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, das $n(d-c) \geq K$ erfüllt. Für dieses $n$ gilt jedoch:

$$b_{nd} = a_{nd} - nd = a_{n(d-c)}$$

Also ein Widerspruch zu $A$ und $B$ disjunkt! Somit sind wir fertig.

**Zweite Lösung:** (Linus) Wie in der ersten Lösung zeigen wir, dass $A^{(0)} := \{a \in \mathbb{N}_0 \mid \exists 0 \leq b \leq a : (a,b) \text{ gut}\} = \{a_0, a_1, \dots\}$ (wobei $a_0 < a_1 < \dots$) unendlich ist. Darüber hinaus bemerken wir, dass falls $(a,b)$ und $(a',b')$ gut sind und zusätzlich $a = a'$ oder $b = b'$ oder $a - b = a' - b'$, dann gilt $(a,b) = (a',b')$. Das führt dazu, dass für jedes $a_k \in A^{(0)}$ genau ein $b_k \in \mathbb{N}_0$ existiert sodass $(a_k, b_k)$ gut ist; per Definition von $A^{(0)}$ gilt zusätzlich $a_k \geq b_k$. Darüber hinaus folgt, dass wenn wir $B^{(0)} := \{b_0, b_1, \dots\}$ setzen, wir $A^{(0)} \cap B^{(0)} = \{0\}$ haben, da falls $a_k = b_l$ mit $k, l > 0$ die Paare $(a_l, a_k)$ und $(b_k, a_k)$ gut sind, aber auch $b_k < a_k = b_l < a_l$, Widerspruch. Zeigen wir nun per starker Induktion, dass für alle $k \geq 1$ folgendes gilt:

(i) $\{0, 1, \dots, b_k\} \subset \{a_0, \dots, a_k\} \cup \{b_0, \dots, b_k\}$

(ii) $a_k - b_k = k$

(iii)
$$(a_k, b_k) = \begin{cases} (a_{k-1}, b_{k-1}) + (2,1) & \text{falls } b_{k-1} + 1 \notin \{a_0, \dots, a_{k-1}\} \\ (a_{k-1}, b_{k-1}) + (3,2) & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Die Aussage gilt für $k = 1$ und $k = 2$, nehmen wir also an, sie gilt für alle $i \leq k$ wobei $k \geq 2$. Nehmen wir an, es gäbe ein gutes Paar $(a_k + 1, b)$, dann muss nach (i) der Induktionshypothese $b > b_k$, da alle Werte bis und mit $b_k$ schon in einem guten Paar mit kleinerem anderen Stapel auftauchen. Dann haben wir aber $a_k + 1 - n \leq k$, was ein Widerspruch ist, da diese Differenz schon von einem kleineren guten Paar besetzt ist, nach (ii) der Induktionshypothese. Wir machen nun eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $b_k + 1 \notin \{a_0, \dots, a_k\}$

Wir zeigen, dass $(a_k + 2, b_k + 1)$ gut ist, und somit $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k, b_k) + (2, 1)$. Tatsächlich sind alle $(a_k + 2, b_k + 1 - m)$ schlecht, da nach (i) $b_k + 1 - m$ schon in einem guten Paar mit kleinerem anderem Stapel auftaucht, $(a_k + 2 - m, b_k + 1 - m)$ ist schlecht da $m = 1$ wegen dem obigen Argument nicht geht und da falls für $m \geq 2$ das Paar $(a_k + 2 - m, b_k + 1 - m)$ gut wäre, wir zwingend $(a_k + 2 - m, b_k + 1 - m) = (a_l, b_l)$ für ein $l \leq k$ hätten, was wegen $k+1 = (a_k+2-m)-(b_k+1-m) = a_l - b_l = l$ nicht geht. Schliesslich ist auch $(a_k+2-m, b_k+1)$ schlecht, da erneut $m = 1$ nicht geht, und falls $(a_k + 2 - m, b_k + 1)$ gut ist und $m \geq 2$, dann kann $b_k + 1$ nicht der kleinere Stapel sein da er sonst höchstens $b_k$ Steine enthalten könnte. Weil aber $b_k + 1 \leq b_k + k = a_k$ muss somit $b_k + 1 \in \{a_0, \dots, a_k\}$, was unserer Annahme widerspricht.

Fall 2: $b_k + 1 \in \{a_0, \dots, a_k\}$

Wir zeigen zuerst, dass $a_{k+1} \geq a_k + 3$. Dazu nehmen wir an, es gäbe ein gutes Paar $(a_k + 2, b)$. Da alle Werte bis und mit $b_k$ schon in einem guten Paar vorkommen wobei der andere Stapel strikt weniger als $a_k + 2$ Steine hat, muss $b > b_k$ gelten. Da nach Annahme $b_k + 1 \in \{a_0, \dots, a_k\}$ ist $b = b_k + 1$ auch nicht möglich. Somit gilt aber $a_k + 2 - b \leq a_k + 2 - (b_k + 2) = k$, was erneut ein Widerspruch ist, da diese Differenz schon von einem kleineren guten Paar besetzt ist. Zeigen wir nun, dass $(a_k + 3, b_k + 2)$ gut ist und somit $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k, b_k) + (3, 2)$. Tatsächlich ist $(a_k + 3, b_k + 2 - m)$ schlecht da alle Werte bis und mit $b_k + 1$ schon in einem kleineren guten Paar vorkommen, $(a_k + 3 - m, b_k + 2 - m)$ ist schlecht da wir $m = 1$ resp. $m = 2$ schon zu Beginn dieses Falls resp. zu Beginn der Induktion ausgeschlossen haben, und falls $(a_k+3-m, b_k+2-m)$ gut ist mit $m \geq 3$, so gilt zwingend $(a_k + 3 - m, b_k + 2 - m) = (a_l, b_l)$ für ein $l \leq k$, was wegen $k + 1 = (a_k + 3 - m) - (b_k + 2 - m) = a_l - b_l = l$ widersprüchlich ist. Schliesslich ist auch

$(a_k+3-m, b_k+2)$ schlecht, da wir $m=1$ und $m=2$ schon ausgeschlossen haben, und falls $(a_k+3-m, b_k+2)$ mit $m \geq 3$ gut ist, so muss $b_k+2$ der grössere der beiden Stapel sein, da er sonst höchstens $b_k$ Steine enthalten könnte. Somit gilt, da $b_k+2 \leq b_k+k \leq a_k$, dass $b_k+2 \in \{a_0, \ldots, a_k\}$, was unserer Annahme $b_k+1 \in \{a_0, \ldots, a_k\}$ widerspricht, da nach (iii) der Induktionshypothese die Differenz zweier Werte aus $\{a_0, \ldots, a_k\}$ nicht gleich 1 sein kann. Somit haben wir (iii) für $k+1$ bewiesen, woraus (i) und (ii) direkt folgen. Zusätzlich bemerken wir, dass aus (i) $\mathbb{N}_0 = A^{(0)} \cup B^{(0)}$ folgt. Berechnet man die ersten paar Werte der Folgen $(a_k)$ und $(b_k)$, so kommt man zur Vermutung, dass die folgende, etwas anschaulichere Rekursionsformel gilt:

$$(a_k, b_k) = \begin{cases} (a_{k-1}, b_{k-1}) + (2,1) & \text{falls } k-1 \in \{a_0, \ldots, a_{k-1}\} \\ (a_{k-1}, b_{k-1}) + (3,2) & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Um diese zu zeigen brauchen wir folgendes Zwischenresultat, welches wir per Induktion für alle $k \geq 1$ zeigen: anscheinend gilt $b_{b_k}+1 = a_k$ und $b_{b_k+1} = a_k+1$. Die beiden Gleichungen gelten für $k=1$, nehmen wir daher an, sie gelten für ein $k \geq 1$. Wir machen die gleiche Fallunterscheidung wie vorher.

Fall 1: $b_k+1 \notin \{a_0, \ldots, a_k\}$

Wir haben also $b_{k+1} = b_k+1$ und somit $b_{b_{k+1}}+1 = b_{b_k+1}+1 = a_k+1+1 = a_{k+1}$ nach unserer Induktionshypothese. Da aber somit insbesondere $b_{b_k+1}+1 \in \{a_0, \ldots, a_{b_k+1}\}$, gilt dank unserer schon bewiesenen Rekursionsformel, dass $b_{b_{k+1}+1} = b_{b_k+2} = b_{b_k+1}+2 = a_k+3 = a_{k+1}+1$.

Fall 2: $b_k+1 \in \{a_0, \ldots, a_k\}$

In diesem Fall gilt $b_{k+1} = b_k+2$ und $a_{k+1} = a_k+3$. Nach Induktionshypothese haben wir $b_{b_k+1}+1 = a_k+2 < a_{k+1}$ und somit $b_{b_k+1}+1 \notin \{a_0, \ldots, a_{b_k+1}\}$. Daraus folgt $b_{b_{k+1}}+1 = b_{b_k+2}+1 = b_{b_k+1}+1+1 = a_k+1+1+1 = a_{k+1}$. Da somit insbesondere auch $b_{b_k+2}+1 \in \{a_0, \ldots, a_{b_k+2}\}$ folgt, erhalten wir auch $b_{b_{k+1}+1} = b_{b_k+3} = b_{b_k+2}+2 = a_{k+1}+1$. Somit sind die beiden Gleichungen bewiesen.

Nun können wir folgende Äquivalenz zeigen: $b_k+1 \in \{a_0, \ldots, a_k\} \iff k \notin \{a_0, \ldots, a_k\}$. Denn falls $b_k+1 = a_l$ dann folgt $l \geq 1$ und somit $b_k+1 = a_l = b_{b_l}+1$ und somit $b_k = b_{b_l} \implies k = b_l \implies k \notin \{a_0, \ldots, a_k\}$. Und falls $k \notin \{a_0, \ldots, a_k\}$, so gibt es $l \geq 1$ mit $k = b_l$ und daher $b_k+1 = b_{b_l}+1 = a_l \in \{a_0, \ldots, a_k\}$. Diese Äquivalenz führt direkt zur anschaulicheren Rekursionsformel. Definiert man nun $s_k = |\{l \geq 0 \mid a_l < k\}|$ so folgt daraus wiederum $a_k = 3(k-s_k)+2s_k = 3k-s_k$. Kommen wir nun endlich zum eigentlichen Beweis.

Nehmen wir an, es gibt ein $K$ sodass $(m_k)_{k \geq K}$ periodisch ist mit Periode $c \geq 1$. Setzt man $A := a_{K+c} - a_K$, so folgt aus der Periodizität, dass $a_{k+c} - a_k = A$ für alle $k \geq K$. Wir bemerken ebenfalls, dass falls $k \geq a_K$, dann enthält $\{l \geq 0 \mid k \leq a_l < k+A\}$ genau $c$ Elemente, woraus $s_{k+A} = s_k + c$ für alle $k \geq a_K$ folgt (am besten überlegt man sich das mit einer Zeichnung). Sei nun $k \geq \max\{K, a_K\}$, dann erhalten wir

$$a_k + A^2 = a_{k+cA} = 3(k+cA) - s_{k+cA} = 3(k+cA) - s_k - c^2$$

und somit

$$A^2 - 3cA + c^2 = 3k - a_k - s_k = 0.$$

Daraus erhalten wir jedoch schliesslich, dass $\frac{A}{c} \in \{\varphi^{-2}, \varphi^2\}$, wobei $\varphi$ der goldene Schnitt ist. Das ist ein Widerspruch, da $\varphi^{-2}$ und $\varphi^2$ irrational sind.

**Marking scheme:**

(a) Erste Lösung:

- $+1$P: $A$ is infinite
- $+1$P: Geometric: In every row and coloumn is exactly. Algebraic: $A \bigsqcup B = \mathbb{N}$
- $+1$P: $a_k - b_k = k$
- $+1$P: $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k + 2, b_k + 1)$ or $(a_k + 3, b_k + 2)$
- $+2$P: Idea to mirror the minimal period length
- $+1$P: finish

**7.** Prove that for all positive integers $n$, there exist two integers $a$ and $b$ such that

$$n \mid 4a^2 + 9b^2 - 1.$$

**Première solution:** (Arnaud)

On va essayer de construire $a$ et $b$ étant donné $n$. Soit donc $n \geq 1$ un entier. Si $\mathrm{ggT}(n, 2) = 1$, alors il suffit de prendre $a \equiv 2^{-1} \pmod{n}$ et $b = 0$. Si $\mathrm{ggT}(n, 3) = 1$, alors de même on prend $a = 0$ et $b \equiv 3^{-1} \pmod{n}$. On comprend à présent comment la solution générale fonctionne.

Écrivons $n = 2^\alpha 3^\beta k$ avec $\mathrm{ggT}(k, 6) = 1$. On choisit $a$ et $b$ comme solutions aux systèmes de congruences suivants (qui existent par le théorème des restes chinois):

$$\begin{cases} a \equiv 0 & \pmod{k}, \\ a \equiv 0 & \pmod{2^\alpha}, \\ a \equiv 2^{-1} & \pmod{3^\beta}, \end{cases} \qquad \begin{cases} b \equiv 3^{-1} & \pmod{k}, \\ b \equiv 3^{-1} & \pmod{2^\alpha}, \\ b \equiv 0 & \pmod{3^\beta}. \end{cases}$$

**Zweite Lösung:** (Paul)

Wir bemerken, dass $4a^2 + 9b^2 - 1 = (2a + 3b)^2 - 12ab - 1$ gilt. Mit dem Satz von Bézout könnten wir nun, da 2 und 3 teilerfremd sind, ganze Zahlen $a, b$ finden mit $2a + 3b = 1$. Dann müsste nur noch der Term $12ab$ durch $n$ teilbar sein, was aber nicht immer gilt. Die Idee lässt sich aber retten: Wir schreiben $n = 2^k m$ mit $m$ ungerade und setzen $a = 2^k x$ und $b = my$. Dann brauchen wir $x, y$ mit

$$n \mid (2^{k+1}x + 3my)^2 - 12 \cdot 2^k mxy - 1 \iff n \mid (2^{k+1}x + 3my)^2 - 1.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(2^{k+1}, 3m) = 1$ ist dies aber dank dem Satz von Bézout möglich.

**Dritte Lösung:** (Linus, geschrieben von Paul) Fixiere $n$, nach dem Satz von Dirichlet gibt es eine Primzahl $p > n$ sodass $p \equiv 5 \pmod{12}$. Dann ist auch $p \equiv 1 \pmod{4}$, also gibt es nach dem Zwei-Quadrate-Satz $x, y$ mit $p = x^2 + y^2$. Zudem gilt $p \equiv 2 \pmod{3}$, daher können $x$ und $y$ nicht durch 3 teilbar sein, denn Quadrate sind modulo 3 immer kongruent zu 0 oder 1. Setzen wir nun

$$\alpha = xy \text{ und } \beta = \frac{x^2 - y^2}{3},$$

dann gilt $4\alpha^2 + 9\beta^2 = p^2$. Wähle nun $c$ sodass $pc \equiv 1 \mod n$, welches wegen $p > n$, also $\mathrm{ggT}(p, n) = 1$, existiert. Dann setzen wir $a = \alpha c,\ b = \beta c$. Es folgt

$$4a^2 + 9b^2 - 1 = p^2c^2 - 1 = (pc - 1)(pc + 1)$$

und somit $n | 4a^2 + 9b^2 - 1$.

**Marking Scheme:**

- Première solution:
  - +2P: un des cas $\operatorname{ggT}(2, n) = 1$ ou $\operatorname{ggT}(3, n) = 1$
  - +1P: tentative concrète d'appliquer le théorème des restes chinois
  - +4P: conclure
- Deuxième solution:
  - +1P: obtenir une identité du type $4a^2 + 9b^2 = (2a \pm 3b)^2 \mp 12ab$
  - +1P: tentative concrète d'appliquer ensuite Bézout
  - +5P: conclure
- Troisième solution:
  - +2P: résoudre un cas $\operatorname{ggT}(n, p) = 1$ avec $p > 3$ (eg. $p = 5$ en posant $a = 2b$)
  - +1P: tentative concrète d'écrire $4a^2 + 9b^2$ comme un carré
  - +4P: conclure

**8.** Seien $k, n$ und $r$ natürliche Zahlen mit $r < n$. Quirin besitzt $kn + r$ schwarze und $kn + r$ weisse Socken. Er möchte sie so auf seiner Wäscheleine aufhängen, dass es keine $2n$ aufeinanderfolgenden Socken gibt, von denen $n$ schwarz und $n$ weiss sind. Zeige, dass Quirin dies genau dann schaffen kann, wenn $r \geq k$ und $n > k + r$ gelten.

**Solution:**(Louis)

La première observation importante pour ce problème est que si une suite de $2n$ chaussettes contient plus de chaussettes blanches que de noires et une autre suite de $2n$ chaussettes qui contient plus de chaussettes noires que de chaussettes blanches, alors il existe quelque part une suite de $2n$ chaussettes qui contient autant de chaussettes blanches que de chaussettes noires. En effet, si on décale la suite d'une chaussette vers la droite alors soit le nombre de chaussettes noires reste le même, soit il augmente ou diminue de 1. Cela implique alors que pour passer d'une séquence à l'autre il faut passer par tous les nombres de chaussettes noires entre deux, et en particulier une séquence contiendra exactement $n$ chaussettes noires.

On sépare maintenant les $2(kn+r)$ chaussettes en $k$ groupes de $2n$ chaussettes consécutives et un dernier groupe de $2r$ chaussettes. Par la remarque précédente on peut supposer que chacun des $k$ groupes contient au moins $n + 1$ chaussettes blanches. Il y a donc au moins $k(n + 1)$ chaussettes blanches parmi ces groupes, donc on obtient l'inégalité $kn + k \leq kn + r$ et donc $k \leq r$. Pour obtenir l'autre inégalité on regarde les $2r$ dernières chaussettes. Par la discussion précédente il y a au maximum $r - k$ chaussettes blanches parmi ces $2r$ chaussettes, et donc il y a au minimum $r + k$ chaussettes noires. Puisque $r < n$, toutes ces $2r$ chaussettes font partie de la suite de $2n$ dernières chaussettes, et donc par la remarque du début on doit avoir $r + k < n$.

On a déjà montré que s'il existe une telle séquence, les inégalités doivent effectivement être vérifiées. Il reste à prouver que quand ces inégalités sont vérifiées on peut construire une telle séquence. On effectue pour cela la construction suivante:
On commence par placer $k$ blocs de $2n$ chaussettes, constitués chacun de $n-1$ chaussettes noires à gauche et $n + 1$ chaussettes blanches à droite. Finalement on place un bloc de $2r$ chaussettes, constitué de $k+r$ chaussettes noires à gauche et $r-k$ chaussettes blanches à droite. Les inégalités impliquent que $r - k \leq 0$ et $k + r < n$. Maintenant si on prend une suite de $2n$ chaussettes, s'il contient des chaussettes d'un seul groupe de chaussettes noires alors par construction il contient au maximum $n - 1$ chaussettes noires. S'il contient des chaussettes appartenant à deux groupes noires différents, alors il doit contenir les $n+1$ chaussettes blanches placées entre ces deux groupes, et donc il peut contenir au plus $n - 1$ chaussettes noires.

**Marking Scheme:**

- 1P: If we displace a sequence of $2n$ socks one sock to the left, the number of black socks changes by at most 1.
- 1P: Every sequence of $2n$ socks contains more white socks than black socks.
- 3P: Prove both inequalities.
  - 2P: Prove only one of these inequalities.
- 2P: Find a construction
  - 1P: Construction without a sufficient justification.

**9.** Soit $ABC$ un triangle aigu tel que $AB < AC$. Soient $E$ et $F$ les pieds des hauteurs issues de $B$ et $C$, respectivement, et soit $M$ le milieu de $BC$. La droite tangente au cercle circonscrit à $ABC$ en $A$ coupe la droite $BC$ en $P$. La droite passant par $A$ parallèle à la droite $BC$ coupe la droite $EF$ en $Q$. Montrer que la droite $PQ$ est perpendiculaire à la droite $AM$.

**Première solution:** (Patrick, by Arnaud)

Comme dans la deuxième preuve, on obtient $\angle QAE = \angle AFE$ et donc $C$ se trouve sur la tangente an $A$ au cercle circonscrit au triangle $AFE$. En particulier, $QA^2 = QE \cdot QF$. De même, $PA^2 = PB \cdot PC$. Enfin, on remarque que les points $BCEF$ se trouvent sur un cercle.

L'astuce est maintenant de considérer le point $A$ comme un cercle dégénéré d'un seul point. La puissance de $P$ par rapport à ce point et $PA^2$ et celle de $Q$ est $QA^2$. Comme $PA^2 = PB \cdot PC$ et $QA^2 = QE \cdot QF$, les points $P$ et $Q$ se trouvent sur la ligne de puissance des cercles $BCEF$ et $A$. En particulier $PQ$ est perpendiculaire à la droite passant par $A$ et le centre du cercle $BCEF$ qui est précisément le point $M$.

**Deuxième solution:** (Arnaud)

On tente une approche vectorielle (motivée par la donnée de $M$ en tant que milieu et l'orthogonalité désirée). Sans passer par des coordonnées, on doit montrer que

$$\vec{AM} \cdot \vec{PQ} = 0.$$

Observer que $\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AQ}$ et, comme $M$ est le milieu de $BC$, $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Il suffit donc de montrer que

$$(\vec{PA} + \vec{AQ}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AQ} \cdot \vec{AB} + \vec{AQ} \cdot \vec{AC} = \vec{AP} \cdot \vec{AB} + \vec{AP} \cdot \vec{AC}.$$

La stratégie est de calculer chacun des quatre produits que l'on obtient en développant le membre de gauche à l'aide de la formule $\vec{v} \cdot \vec{w} = |v| \cdot |w| \cdot \cos(\theta)$ (et donc sans passé par des coordonnées !). Il faut donc trouver des relations entre les longueurs $|AP|, |AB|, |AC|, |AQ|$ et les angles entre ces segments.

Un peu de chasse aux angles nous donne: $\angle PAB = \angle ACB = \gamma$ en utilisant les propriétés des tangentes, $\angle QAC = \gamma$ par parallélisme, $\angle AFQ = \gamma$ en utilisant que $FEBC$ est inscrit. De même, $\angle AEF = \angle ABC = \beta$. En contemplant la figure, on remarque alors que $\Delta QAE \sim \Delta PBA$, car les deux triangles ont les mêmes angles. On en déduit

$$\frac{|AQ|}{|AP|} = \frac{|AE|}{|AB|} = \cos(\alpha).$$

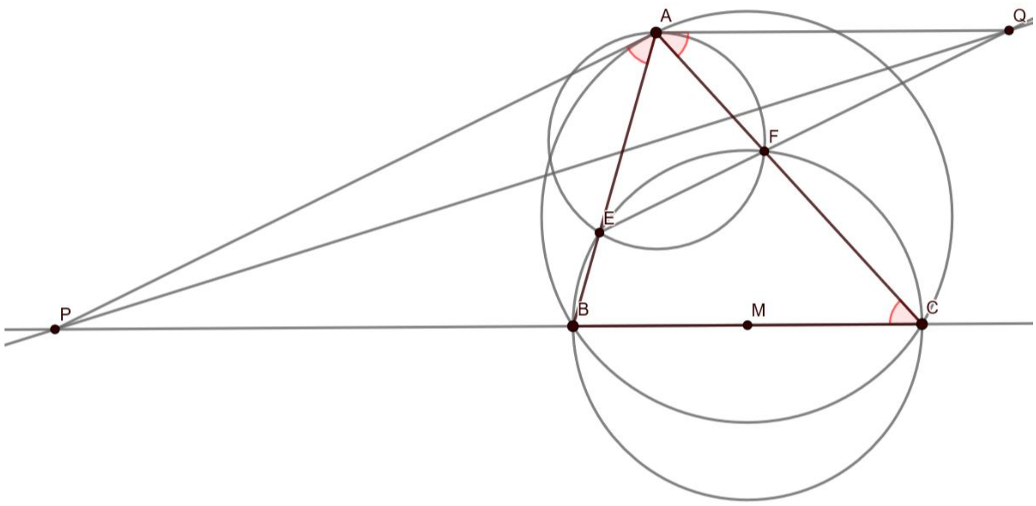
La dernière égalité est une application de la trigonométrie dans le triangle $AEB$ rectangle en $E$. Par le théorème du sinus, dans le triangle $ABC$, on obtient

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}.$$

La relation de vecteurs désirée devient, en utilisant $\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\pi-\beta) = -\cos(\beta)$,

$$\begin{aligned}
\vec{AQ}\cdot\vec{AB} + \vec{AQ}\cdot\vec{AC} &= \vec{AP}\cdot\vec{AB} + \vec{AP}\cdot\vec{AC} \\
\Leftrightarrow \frac{|AQ|}{|AP|}\left(\frac{|AB|}{|AC|}\cos(\alpha+\gamma) + \cos(\gamma)\right) &= \left(\frac{|AB|}{|AC|}\cos(\gamma) + \cos(\alpha+\gamma)\right) \\
\Leftrightarrow \cos(\alpha)\left(\frac{-\sin(\gamma)\cos(\beta)}{\sin(\beta)} + \cos(\gamma)\right) &= \frac{\sin(\gamma)\cos(\gamma)}{\sin(\beta)} - \cos(\beta) \\
\Leftrightarrow \cos(\alpha)(\sin(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\gamma)\cos(\beta)) &= \sin(\gamma)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\cos(\beta) \\
\Leftrightarrow \cos(\alpha)\sin(\beta-\gamma) &= 1/2(\sin(2\gamma) - \sin(2\beta)) \\
\Leftrightarrow \cos(\alpha)\sin(\beta-\gamma) &= \cos(\beta+\gamma)\sin(\gamma-\beta) \\
\Leftrightarrow -\cos(\alpha) &= \cos(\beta+\gamma).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifiée, car, de nouveau, $\cos(\beta+\gamma) = \cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$. On a utilisé plusieurs identités trigonométriques comme la formule pour le sinus d'une différence, l'imparité du sinus, le sinus du double d'un angle ou encore la formule par exprimer une différence de deux sinus comme un produit.



**Marking Scheme:**

- First solution:
  - 0P: $PA^2 = PB \cdot PC$ or $BCEF$ lie on a circle
  - 1P: basic angle chasing that leads to one relation of type: $QA^2 = QE \cdot QF$.
  - 2P: reformulating the conclusion in terms of power lines by observing that $M$ is the center of $BCEF$ and that
  - 4P: Conclusion
- Second solution
  - 1P: basic angle chasing that leads to the relation that one of the triangle $\Delta PBA$ or $\Delta PAC$ is similair to one of the triangle $\Delta QEA$ or $\Delta QAF$ or equivalently proving that two angles are the same
  - 2P: reformulating the conclusion with a vector relation where one used that $M$ is the midpoint of $BC$
  - 4P: conclusion

**10.** Sei $n \geq 5$ eine ganze Zahl. Ein Laden verkauft Jonglierbälle in $n$ verschiedenen Farben. Jedes von $n+1$ Kindern kauft drei Jonglierbälle, welche drei unterschiedliche Farben haben, aber keine zwei Kinder kaufen genau die gleiche Farbkombination. Zeige, dass es mindestens zwei Kinder gibt, welche genau einen Ball der selben Farbe gekauft haben.

**Lösung (Cyril):** Wir versuchen, dass möglichst viele Kinder Bälle kaufen, sodass nie zwei Kinder genau eine Farbe gemeinsam haben. Wir zeigen dann, dass höchstens $n$ Kinder Bälle kaufen können.

**Lemma 1.** *Seien $K_1, K_2, K_3$ Kinder die Bälle kaufen, sodass $K_1$ und $K_2$ zwei Farben gemeinsam haben und $K_2$ und $K_3$ zwei Farben gemeinsam haben. Dann haben auch $K_1$ und $K_3$ genau zwei Farben gemeinsam*

*Beweis.* Sowohl $K_1$ als auch $K_3$ haben zwei Farben mit $K_2$ gemeinsam. Also müssen sie mindestens eine Farbe gemeinsam haben. Da wir dies jedoch nicht erlauben, müssen sie zwei Farben gemeinsam haben. □

Dieses Lemma sagt uns nun, dass die Kinder in Gruppen zusammen sind, die untereinander immer paarweise zwei Farben gemeinsam haben. Jede Gruppe von Kindern hat dann ihre eigenen Farben zur Verfügung.

Wir müssen unsere Behauptung (mit $n$ Farben können höchstens $n$ Kinder Bälle kaufen) also nur noch für eine Gruppe von Kindern beweisen, die paarweise immer zwei Farben gemeinsam haben.

Wir versuchen nun eine möglichst grosse Gruppe mit möglichst wenig Farben zu konstruieren, wobei wir dabei zwei Fälle antreffen.

- Anna kauft die Farben $g$, $h$ und $a$
- Beat kauft die Farben $g$, $h$ und $b$, da er zwei gleiche Farben wir Anna haben muss
  (a) Charlie kauft die Farben $g$, $h$ und $c$
  (b) Charlie kauft die Farben $g$, $a$ und $b$

Wir zeigen nun, wieviele weiter Kinder im Fall (a) und (b) Bälle kaufen können:

(a) Wie können nun beliebig viele weitere Kinder hinzufügen, indem ein neues Kind Xenia die Farben $g$, $h$ und $x$ kauft, wobei $x$ immer eine neue Farbe sein muss. Denn wenn sie nicht $a$ und $b$ kaufen würde, müsste sie die Farben $a$, $b$ und $c$ kaufen und eine von $g$ und $h$.

    Das heisst, mit $n$ Farben können dann höchstens $n-2$ Kinder Bälle kaufen.

(b) Hier kann noch Daniel kommen und die Farben $h$, $a$ und $b$ kaufen, was man nach kurzer Fallunterscheidung die wir hier weglassen, sieht.

    Das heisst, mit 4 Farben können 4 Kinder Bälle kaufen

Somit haben wir für alle Fälle, dass bei $n$ Farben maximal $n$ Kinder Bälle kaufen können, sodass sie nicht genau eine Farbe gemeinsam haben. Also gibt es mit $n+1$ Kindern sicher einen solchen Fall.

(Wir haben auch bewiesen, dass es mit $n$ Kindern nur geht, falls $4 \mid n$ gilt)

**Marking Scheme:**

- 1P: Anna und Beat haben eine gemeinsame Farbe und Beat und Charlie haben eine Farbe gemeinsam $\implies$ Anna und Charlie haben eine Farbe gemeinsam

- 1P: Auf Gruppen reduzieren, die untereinander keine Farben teilen
- 2P: Fall (a)
- 2P: Fall (b)

**11.** Soit $n$ un nombre entier strictement positif. Déterminer s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ (dépendant de $n$) tel que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, x_2, \dots, x_n$, on ait

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq (1-\epsilon) \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \epsilon \cdot \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

**Answer:** There is such an $\epsilon$ for every $n \in \mathbb{N}$.

**First solution:** (David, Paul)

If there is such an $\epsilon$ for every $n$, we expect it to depend on $n$. Keeping the chain of inequalities AM $\geq$ GM $\geq$ HM in mind, we see that the right hand side becomes larger if $\epsilon$ becomes smaller. So an educated guess could be $\epsilon = \frac{1}{n}$, and this will actually work.

Since

$$1 - \epsilon = \frac{n-1}{n},$$

we can write the right hand side as a sum of $n-1$ arithmetic means and 1 harmonic mean. We apply AM-GM with $n$ variables to this (where we multiply both the numerator and the denominator of the harmonic mean by $x_1 \cdots x_n$ beforehand):

$$(n-1)\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n^2} + \frac{x_1 \cdots x_n}{\sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} x_i} \geq n \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n^2}\right)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} x_i}}.$$

We want to show that the term on the right hand side is larger than $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$. A computation shows that this is equivalent to

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n-1]{\frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} x_i}{n}}.$$

This is just McLaurin's inequality.

Alternatively (actually this is just a proof of McLaurin), one can bring the inequality into the form

$$n^2 (x_1 + \cdots + x_n)^{n-1} \geq n^n \left( \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

Note that this is completely symmetric, and the right hand side is a multiple (in the Muirhead notation from class) of $[1, \dots, 1, 0]$. If we multiply out the $(n-1)$th power on the left side, we get a lot of symmetric sums. Since we only raise it to the $(n-1)$th power, and not the $n$th power, no term of the form $x_1 \cdots x_n$ will appear. Said differently, the symmetric sums will be of the type $[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0]$ where the $\alpha_i$ are integers such that $\sum \alpha_i = n-1$ and $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{n-1} \geq 0$. All these sums majorize $[1, \dots, 1, 0]$. Since both sides have the same number of summands, namely $n^{n+1}$, we are done using Muirhead's inequality.

**Remark:** One observation that can be made at the beginning is that if the inequality holds for $\varepsilon_1$, then it holds for any $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ as

$$(1 - \varepsilon_1)\mathrm{AM} + \varepsilon_1 \mathrm{HM} \leq (1 - \varepsilon_2)\mathrm{AM} + \varepsilon_2 \mathrm{HM},$$

by AM-HM.

**Marking Scheme:**

Partial solution ($\leq 4P$):

- +1P: claiming $\epsilon(n) = 1/n$ works
- small cases (non-additive):
  - +0P: case $n = 1$
  - +1P: one case $n \geq 2$
  - +2P: two cases $n \geq 2$
- +2P: applying AM-GM by considering AM $(n-1)$ times and AM once **or** applying MacLaurin on the term $\sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} x_i$ in the inital RHS

Full solution ($\geq 5P$): 7P

**12.** On définit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres entiers par $a_n := 2^n + 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrer qu'il existe une infinité de termes de la suite pouvant être exprimés comme la somme d'au moins deux termes distincts de la suite, de même qu'il existe une infinité de termes de la suite ne pouvant pas s'écrire de la sorte.

**Solution:** (Louis)

On appelle un nombre entier $n$ *exprimable* s'il peut être écrit comme une somme de au moins deux $a_k$.

On calcule tout d'abord la somme de tous les termes $a_i$ jusqu'à un certain indice $n$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = 2^{n+1} + 2^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - 3 < a_{n+2}$$

donc si $a_n$ est exprimable le terme $a_{n-1}$ doit apparaître dans sa somme.
Une observation apparemment triviale mais qui va beaucoup nous aider pour la suite est que un nombre $b < S_n$ est exprimable si et seulement si $S_n - b$ est exprimable.

On observe que pour tout nombre entier $n$,

$$a_{2n} = 2a_{2n-1}.$$

Ainsi en particulier si $a_{2n-1}$ est exprimable, alors on peut rajouter $a_{2n-1}$ à cette somme pour exprimer $a_2n$. Inversement par la remarque précédente pour exprimer $a_{2n}$ il faut utiliser $a_{2n-1}$, donc $a_{2n}$ est exprimable si et seulement si $a_{2n-1}$ l'est. Cette relation ne nous sera pas directement utile pour résoudre l'exercice, mais elle permet de commencer à aborder le problème.

On remarque que pour tout $n$, $a_{2n+1} - a_{2n} = 2^{2n}$ et comme d'autre part il faut nécessairement utiliser $a_{2n}$ pour exprimer $a_{2n+1}$, il s'ensuit que $a_{2n+1}$ est exprimable si et seulement si $2^{2n}$ est exprimable.

On remarque de plus que $2^{n+1}$ est exprimable si et seulement $2^{2n} - 3$ est exprimable, et ce dernier nombre est exprimable si et seulement si $2^{4n-2}$ est exprimable. Autrement dit, $2^n$ est exprimable si et seulement si $2^{4n-6}$ est exprimable.

On vérifie facilement que $2^3 = 8$ est exprimable, et avec un peu plus de recherche on trouve que $2^12 = 4096$ n'est pas exprimable. On obtient donc une suite infinie de puissances de 2 exprimables et de puissances de 2 non exprimables et le problème est terminé.

**Marking Scheme:**

- 2P: $b$ exprimable si et seulement si $S_n - b$ exprimable.
- 1P: $a_{2n+1}$ exprimable si et seulement si $2^{2n}$ exprimable.
- 2P: $2^n$ exprimable si et seulement si $2^{4n-6}$ exprimable.
- +1P: Cas de base pour l'induction: $2^3$ exprimable.
- +1P: Cas de base pour l'induction: $2^{12}$ pas exprimable.

Si aucun des points ci-dessus n'est obtenu, l'observation que $a_{2n}$ est exprimable si et seulement si $a_{2n-1}$ l'est est créditée de 1P.