

**Zeit:** 3 Stunden

**Schwierigkeit:** Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.

**Punkte:** Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

## Geometrie

- G1)** Sei  $k$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$ . Seien  $A, B, C$  und  $D$  vier unterschiedliche Punkte auf dem Kreis  $k$  in dieser Reihenfolge, sodass  $AB$  ein Durchmesser von  $k$  ist. Der Umkreis des Dreiecks  $COD$  schneide  $AC$  ein zweites Mal in  $P$ . Zeige, dass  $OP$  und  $BD$  parallel sind.
- G2)** Sei  $ABC$  ein Dreieck mit  $AB > AC$ . Die Winkelhalbierenden bei  $B$  und  $C$  treffen sich im Punkt  $I$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$ . Der Umkreis des Dreiecks  $BIC$  schneidet  $AB$  ein zweites Mal in  $X$  und  $AC$  ein zweites Mal in  $Y$ . Zeige, dass  $CX$  parallel zur  $BY$  ist.

## Kombinatorik

- K1)** Wir betrachten ein weisses  $5 \times 5$  Quadrat bestehend aus 25 Einheitsquadraten. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eines oder mehrere der Einheitsquadrate schwarz anzumalen, sodass die resultierende schwarze Fläche ein Rechteck bildet?
- K2)** Das Dorf Roche hat 2020 Einwohner. Eines Tages macht der berühmte Mathematiker Georges de Rham die folgenden Beobachtungen:
- Jeder Dorfbewohner kennt einen weiteren mit dem gleichen Alter.
  - In jeder Gruppe von 192 Personen aus dem Dorf gibt es mindestens drei mit demselben Alter.

Zeige, dass es eine Gruppe von 22 Dorfbewohnern gibt, die alle dasselbe Alter haben.

## Zahlentheorie

- Z1)** Falls  $p \geq 5$  eine Primzahl ist, sei  $q$  die kleinste Primzahl sodass  $q > p$  und sei  $n$  die Anzahl der positiven Teiler von  $p + q$  (1 und  $p + q$  inklusive).
- a) Zeige, dass egal welche Primzahl  $p$  gewählt wurde, die Zahl  $n$  grösser oder gleich 4 ist.
  - b) Finde den kleinstmöglichen Wert  $m$ , den  $n$  annehmen kann unter allen möglichen Wahlen von  $p$ . Das heisst:
    - Gib ein Beispiel für eine Primzahl  $p$  an, sodass der Wert  $m$  erreicht wird.
    - Zeige, dass es keine Primzahl  $p$  gibt für die der Wert von  $n$  kleiner als  $m$  ist.
- Z2)** Sei  $p$  eine Primzahl und  $a, b, c$  und  $n$  positive ganze Zahlen mit  $a, b, c < p$ , sodass die drei folgenden Aussagen gelten:

$$p^2 \mid a + (n - 1) \cdot b, \quad p^2 \mid b + (n - 1) \cdot c, \quad p^2 \mid c + (n - 1) \cdot a.$$

Zeige, dass  $n$  keine Primzahl ist.