MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Vorrunde 2020

Lausanne, Lugano, Zürich - 7. Dezember 2019

Eine vollständige Lösung ist 7 Punkte wert. Bei jeder Aufgabe kann es bis zu 2 Punkte Abzug geben für kleine Fehler bei einer sonst korrekten Lösung. Teilpunkte werden gemäss dem Punkteschema vergeben.

Im Anschluss befinden sich die Lösungen mit Vorrundentheorie, die den Korrektoren bekannt sind. Am Ende jedes Problems werden noch alternative Lösungen präsentiert, die auch andere Theorie verwenden können. Während des Trainings zu Hause werden die Teilnehmenden dazu ermutigt, alle ihnen bekannten Methoden zu verwenden. An der Prüfung hingegen ist es nicht empfohlen mit Methoden, welche sie unter Prüfungskonditionen nicht genügend beherrschen, nach alternativen Lösungen zu suchen. Damit wird riskiert, dass wertvolle Zeit verloren geht.

**G1)** Sei $k$ ein Kreis mit Mittelpunkt $O$. Seien $A$, $B$, $C$ und $D$ vier unterschiedliche Punkte auf dem Kreis $k$ in dieser Reihenfolge, sodass $AB$ ein Durchmesser von $k$ ist. Der Umkreis des Dreiecks $COD$ schneide $AC$ zum zweiten mal in $P$. Zeige, dass $OP$ und $BD$ parallel sind.

**Lösung 1 (Louis), Winkeljagd:** Wir zeigen, dass $\angle ODB = \angle POD$. Dies beweist, dass die Linien parallel sind.

Da $O$ der Mittelpunkt des Kreises ist, haben wir $OD = OB$ und somit ist das Dreieck $ODB$ gleichschenklig an $O$. Somit ist $\angle ODB = \angle OBD$. Weil $O$ auf der Strecke $AB$ liegt, wissen wir $\angle OBD = \angle ABD$. Die Punkte $A, B, C, D$ sind auf einem Kreis, also $\angle ABD = \angle ACD = \angle PCD$. Zum Schluss sind die Punkte $C, O, D, P$ alle auf einem Kreis und $\angle PCD = \angle POD$. Also haben wir

$$\angle ODB = \angle POD.$$

und wir sind fertig.

**Marking Scheme**

Für unvollständige Lösungen sind folgende Punkte möglich. ($\leq 4$P):

(a) Working Forward Punkte:

**Bemerkung:** Für die folgenden Winkelgleichungen sind Markierungen auf der Skizze **nicht** ausreichend. Die Beziehungen sollten anderswo explizit genannt werden.

- +1P: Eine Winkelbeziehung im Sehnenviereck $ABCD$ **oder** $CPDO$ finden (zB. $\angle PCD = \angle POD$ oder $\angle DBA = \angle ACD$)
- +1P: Eine Winkelbeziehung zwischen den beiden Sehnenvierecken $ABCD$ **und** $CPDO$ finden (zB. $\angle PCD = \angle DBA$)
- +1P: Eine Winkelbeziehung finden, welche benutzt, dass $O$ der Mittelpunkt des Kreises um $ABCD$ ist (zB. $\angle ODB = \angle OBD$)

(b) Working Backward Punkte:

- +1P: Die gewünschte Bedingung mit Winkeln ausdrücken (zB. $\angle POD = \angle ODB$ oder $\angle DBA = \angle POA$)

**Alternative solutions**

**Solution 2 (Tanish), Nine-point circle:**

Let $X$ be $AC \cap BD$ and $Q$ be the second intersection of $BD$ and $(COD)$. We will prove that $(COD)$ is the nine-point circle of $AXB$. But this is clear - $O$ is the midpoint of $AB$, $D$ is the base of the altitude dropped from $B$ (Thales) and $C$ is the base of the altitude dropped from $A$ (Thales). It follows that $P$ and $Q$ are the midpoints of $AX$ and $BX$ respectively, and $XPOQ$ is a parallelogram.

**Solution 3 (Tanish), Inversion:**

Let us invert about $k$. $AC$ is sent to the circumcircle of $OAC$; the circumcircle of $OAD$ is sent to $DC$. This means that $P'$ is the intersection of these two. $OP$ is sent to the line $OP'$ and $BC$ is sent to $BC$, so it suffices to prove that $OP' \parallel BD$. This is equivalent to $\angle AOP' = \angle ABD$. Since $\angle ABD = 2\angle AOD$, we simply have to prove $OP'$ bisects $\angle AOD$, or that (as $AO = OD$), $OP'$ bisects $\angle AP'D$. However this last statement is clearly true when you consider the circumcircle of $AODP'$ as $\angle OP'A$ subtends the arc $\overset{\frown}{OA}$ and $\angle OP'D$ subtends the arc $\overset{\frown}{OC}$, which are of equal length as $OA = OC$.

*Note*: $OP$ is the same line as $OP'$ and therefore you could equally prove that $OP$ bisects $AOD$ or $APD$, but this is not as trivial.

**G2)** Sei $ABC$ ein Dreieck mit $AB > AC$. Die Winkelhalbierenden bei $B$ und $C$ treffen sich im Punkt $I$ innerhalb des Dreiecks $ABC$. Der Umkreis des Dreiecks $BIC$ schneidet $AB$ ein zweites Mal in $X$ und $AC$ ein zweites Mal in $Y$. Zeige, dass $CX$ parallel zur $BY$ ist.

**Lösung 1 (Arnaud), Winkeljagd:**

Wir zeigen, dass $\angle ACX = \angle AYB$. Dies ist ausreichen um zu zeigen, dass die Linien parallel sind. Wir nehmen für unseren Beweis an, dass $X$ zwischen $A$ und $B$, $Y$ nicht zwischen $A$ und $C$ liegt.

Da $CI$ die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist, haben wir $\angle ACI = \angle ICB$. Die Punkte $ICYB$ bilden ein Sehnenviereck und somit ist $\angle ICB = \angle IYB$. Wir wissen nun, dass

$$\angle ACI = \angle IYB.$$

Da $ICYB$ ein Sehnenviereck ist, haben wir ausserdem $\angle CYI = \angle CBI$. Die Linie $IB$ halbiert $\angle CAB$ und somit ist $\angle CBI = \angle IBA$. Der Punkt $X$ ist zwischen $A$ und $B$, also $\angle IBA = \angle IBX$. Weil nun die Punkte $XBCI$ auf einem Kreis liegen, haben wir $\angle IBX = \angle ICX$. Somit ist

$$\angle CYI = \angle ICX.$$

Wir schlussfolgern

$$\angle ACX = \angle ACI + \angle ICX = \angle IYB + \angle CYI = \angle CYB = \angle AYB.$$

Für die letzte Gleichung benutzen wir, dass $C$ zwischen $A$ und $Y$ liegt.

**Lösung 2 (Arnaud), Strahlensatz:**

In dieser Lösung zeigen wir, dass $AX/AB = AC/AY$. Der Strahlensatz besagt dann, dass $XC$ und $BY$ parallel sind.

Da $XICB$ eine Sehnenviereck ist und $X$ zwischen $A$ und $B$ liegt, wissen wir, dass $\angle AXI = \angle BCI$. Weil die Linie $CI$ den Winkel bei $C$ halbiert, folgt $\angle BCI = \angle ICA$. Zusätzlich haben wir

$$\angle AXI = \angle ACI.$$

Analog benutzten wir, dass $XICB$ ein Sehenviereck ist und dass $IB$ den Winkel bei $B$ halbiert. Es folgt

$$\angle ICX = \angle IBX = \angle IBC = \angle IXC.$$

Kombinieren wir nun diese beiden Aussagen und die Tatsache, dass $X$ zwischen $A$ und $B$ liegt, erhalten wir:

$$\angle AXC = \angle AXI + \angle IXC = \angle ACI + \angle ICX = \angle ACX,$$

und somit ist das Dreieck $ACX$ gleichschenklig bei $A$, also $AX = AC$. Es gibt viele Wege von hier fertig zu machen. Zum Beispiel:

(a) Weil $XCYB$ ein Sehnenviereck ist, besagt die Potentz von $A$, dass $AX \cdot AB = AC \cdot AY$. Weil $AX = AC$, haben wir $AB = AY$. Also $AX/AB = AC/AY$.

(b) Weil $XCYB$ ein Sehenviereck ist, folgt $\angle XBY = \angle ACX$ und $\angle AXC = \angle CYB$. Da das Dreieck $AXC$ gleichschneklig ist bei $A$, haben wir $\angle AXC = \angle ACX$ und somit $\angle XBY = \angle CYB$. Zusätzlich haben wir $\angle ABY = \angle AYB$. Also ist das Dreieck $ABY$ gleichschenklig bei $A$ und $AB = AY$.

**Marking Scheme:**

Unvollständige Lösungen werden wie folgt bewertet: Additive Punkte ($\leq$ 3P):

(a) Working Forward Punkte:

- +1P: Finde eine Winkelbeziehung in einem Sehnenviereck unter den Punkten $\{X, I, C, Y, B\}$
- +1P: Eine Winkelbeziehung in einem **anderen Sehnenviereck** unter den Punkten $\{X, I, C, Y, B\}$ finden
- +1P: Finde eine Winkelbeziehung die sowohl ein Sehnenviereck unter $\{X, I, C, Y, B\}$, sowie eine Winkelhabierende $\{CI, BI\}$ benutzt.
- +2P: Zeige, dass der Mittelpunkt des Kreises durch $B, X, I, C, Y$ der Schnittpunkt von $AI$ mit dem Umkreis von $ABC$ ist (Incenter-Excenter Lemma)

(b) Working Backward Punkte:

- +0P: Die gewünschte Bedingung mit Winkeln (zB. $\angle ACX = \angle AYB$) oder Seitenverhältnisse ($AX/AB = AC/AY$) formulieren
- +1P: Die gewünschte Bedingung mit *aufgeteilten* Winkeln (zB. $\angle ACI = \angle IYB$ und $\angle ICX = \angle AYI$) oder einer Gleichung in Längen ($AX = AC$ und $AB = AY$) formulieren

Unvollständige Resultate (nicht additiv mit den bisherigen Punkten, $\geq$ 4P):

(a) 4P:

- Zeige, dass $ACX$ gleichschenklig ist und somit $AX = AC$, oder
- Zeige, dass $ABY$ gleichschenklig ist und somit $AB = AY$

(b) 5P:

- Zeige, dass $AX = AC$ und $AB = AY$
- Zeige, dass $\angle ACX = \angle AYB$ oder eine beliebige andere Winkelbeziehung aus der direkt folgt, dass die Linien Parallel sind.

**Bemerkung:** Es wird nicht erwartet, dass gezeigt wird, dass $X$ zwischen $A$ und $B$, oder $C$ zwischen $A$ und $Y$ liegt.

### Alternative solutions

### Solution 3 (Tanish), Incenter-Excenter Lemma:

The Incenter-Excenter Lemma tells us that if we prolong $AI$ until it intersects the circumcircle of $ABC$ at $I_A$, $I_A$ happens to be the circumcenter of $BIC$. There are multiple ways to conclude, one of which is to take the reflection across the line $AI_A$, which sends $A$ to $A$, $B$ to $Y$ and $C$ to $X$ (as the lines $AB$ and $AC$ are swapped and the circle $(BIC)$ is preserved) and it immediately follows that $BY \parallel CX$.

**K1)** Wir betrachten ein weisses $5 \times 5$-Quadrat bestehend aus 25 Einheitsquadraten. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eines oder mehrere der Einheitsquadrate schwarz anzumalen, sodass die resultierende schwarze Fläche ein Rechteck bildet?

**Lösung 1 (Tanish), Gegenüberliegende Ecken zählen**: Wir betrachten die Ecken eines beliebigen Rechtecks. Diese liegen in einem Raster bestehend aus 36 Punkten in einem $6 \times 6$ Quadrat. Wir wählen einen dieser Punkte als den ersten Eckpunkt. Wenn wir nun den gegenüberliegenden Eckpunkt wählen, haben wir ein Rechteck definiert. Gegenüberliegende Ecken können nicht in der selben Zeile oder Spalte liegen, wir wählen also einen von 25 anderen Punkten. Total haben wir also 36 mal 25 Rechtecke. Aber wir haben jedes Rechteck 4 mal gezählt - es gibt zwei Paare von gegenüberliegenden Ecken, die wir jeweils doppelt gezählt haben - wir teilen also unser Resultat durch 4 und erhalten $9 \times 25 = 225$.
**Anmerkung (Jana)**: Es ist auch möglich die möglichen Paare von gegenüberliegenden Eckpunkten folgendermassen zu zählen: Zuerst wählen wir zwei unterschidliche Punkte aus dem $6 \times 6$ Quadrat. Dafür gibt es $\binom{36}{2} = 18 \cdot 35$ Möglichkeiten. Jetzt müssen wir die Paare subtrahieren, welche sich in der gleichen Zeile oder Spalte befinden. Da es insgesamt 6 Zeilen und 6 Spalten gibt und wir in jeder dieser Spalten oder Zeilen $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten haben ein Paar auszuwählen, müssen wir $12 \cdot \binom{6}{2} = 12 \cdot 15$ subtrahieren. In diesem Fall haben wir jedes Rechteck doppelt gezählt, wir erhalten also das Resultat $\frac{1}{2} \cdot (18 \cdot 35 - 12 \cdot 15) = 225$.

**Lösung 2 (Tanish), Zählen nach Höhe und Breite**: Wir betrachten die möglichen Rechtecke mit Höhe $a$ und Breite $b$. Das Einheitsquadrat oben links in unserem Rechteck liegt im $(6-a) \times (6-b)$ Rechteck in der Ecke oben links in unserem grossen Quadrat, da unser Rechteck sonst keinen Platz hat. Die totale Anzahl Möglichkeiten ist also

$$\sum_{a=1}^{5}(6-a)\sum_{b=1}^{5}(6-b) = \sum_{a=1}^{5}(6-a) \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$$

Analog hätten wir auch jeden anderen Eckpunkt unseres Rechtecks betrachten können.

**Lösung 3 (Tanish), Zählen nach Seiten**: Unser Rechteck ist eindeutig definiert durch ein Zeilen- und ein Spaltenpaar unseres Rasters (die zwei Zeilen und Spalten repräsentieren jeweils die obere und untere, respektive linke und rechte Seite unseres Rechtecks). Da wir aus 6 Zeilen und 6 Spalten wählen, haben wir total $\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = 15^2 = 225$ Möglichkeiten.

**Lösung 4 (Tanish), Zählen nach beliebigem Eckpunkt**: Wir nummerieren unsere Einheitsquadrate mit $(x, y)$, wobei $(1, 1)$ das Quadrat links unten und $(5, 5)$ das Quadrat oben rechts ist. Wir betrachten nun alle Rechtecke, deren Eckfeld oben rechts $(a, b)$ ist. Das Rechteck ist einmalig definiert durch zwei gegenüberliegende Ecken, also müssen wir nur den gegenüberliegenden Eckpunkt $(< a, < b)$ wählen. Für dies gibt es $a \cdot b$ Möglichkeiten. Wenn wir über alle möglichen $(a, b)$ summieren, erhalten wir

$$\sum_{a=1}^{5} a \sum_{b=1}^{5} b = \sum_{a=1}^{5} a \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$$

Analog kann man auch jeden anderen Eckpunkt betrachten.

**Lösung 5 (Tanish), Zählen nach kürzester Seite**: Wir zählen alle Rechtecke mit kürzester Seite $x$. Nach der Ein-Ausschaltformel ist dies die Anzahl Rechtecke mit Höhe $x$ und Breite $\geq x$ plus die Anzahl Rechtecke mit Breite $x$ und Höhe $\geq x$ minus die Anzahl Rechtecke mit Breite *und* Höhe $x$. Das Resultat in *Lösung 2* zeigt, dass die Anzahl Rechtecke mit Dimensionen $a \times b$

durch $(6-a)\cdot(6-b)$ gegeben ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{5}\left((2\cdot\sum_{y=x}^{5}\left((6-y)\cdot(6-x)\right)-(6-x)(6-x)\right) &= \sum_{x=1}^{5}(6-x)(1+2+\ldots(6-x)\ldots\ldots+2+1) \\
&= \sum_{x=1}^{5}(6-x)(6-x)^2 \\
&= \sum_{x=1}^{5}(6-x)^3 \\
&= 125+64+27+8+1=225
\end{aligned}$$

Alle oben genannten Lösungen kann man für ein $n\times n$-Quadrat verallgemeinern.

**Marking scheme**

- 1P: Richtige Lösung 225 (wird zu den restlichen Punkten addiert)

Die folgenden Punkte sind nicht additiv.

- 1P: Quadrate irgendwie nummerieren oder die Rechtecke in disjunkte Gruppen aufteilen.
- 3P: Beobachtung, wie die Rechtecke gegeben sein können. (z.B. Auswahl gegenüberliegender Eckpunkte, ein Paar von Zeilen und ein Paar von Spalten)
- 4P: Begründete Summe, welche jedes Rechteck gleich oft zählt.
- 4P: Die Rechtecke in disjunkte Gruppen aufteilen und die Anzahl Rechtecke in jeder Gruppe berechnen.
- 5P: Begründete Formel, welche die Anzahl Rechtecke zählt

Ohne korrekte Formel sind maximum 4 Punkte möglich. Um die volle Punktzahl zu erreichen wird erwartet, dass nicht triviale Summen begründet werden.

**Alternative solutions**

**Solution 6 (Tanish), General proof by induction using bijections**: Let us prove the general result that the number of rectangles in a $n \times n$ square is $\sum_{i=1}^{n} i^3$. For the base case, there is clearly only 1 possible rectangle in a $1 \times 1$ square. Now suppose the proposition holds true for the case $n$. Now expand the grid to an $(n+1) \times (n+1)$ grid by adding a column on the right and a row on top. For every rectangle possible in the case $n$ we now modify it by moving its top-right corner one column up and to the right. This application represents a bijection between the rectangles in the case $n$ and the rectangles in the case $n+1$ without a side of length 1 (this can be verified by seeing that both the application and its inverse are surjective). It remains to count the "new"rectangles, or those with at least one side of length 1. These are well-defined by the choice of a square and then a square in the same row or column to represent the ëndsöf the rectangle (the second square can be the same as the first one!), and this method counts every rectangle twice. We have $n^2$ choices for the first square and $2n$ choices for the second square after that ($n$ in the same row, $n$ in the same column) giving a total of $2n^3$ new rectangles, which we divide by 2, to give $n^3$.
*Note:* It is possible to use this same method for solution 5 to count the number of rectangles of smaller side $x$, as these rectangles are well defined by the choice of two $x \times x$ squares in the same columns or rows (again, counting each rectangle twice).

**K2)** Das Dorf Roche hat 2020 Einwohner. Eines Tages macht der berühmte Mathematiker Georges de Rham die folgenden Beobachtungen:

- Jeder Dorfbewohner kennt einen weiteren mit dem gleichen Alter.
- In jeder Gruppe von 192 Personen aus dem Dorf gibt es mindestens drei mit demselben Alter.

Zeige, dass es eine Gruppe von 22 Dorfbewohnern gibt, die alle dasselbe Alter haben.

**Lösung:** Wir beweisen, dass höchstens 95 verschiedene Alter vorkommen. Nehme an es treten 96 oder mehr verschiedene Alter auf. Da jeder Dorfbewohner einen mit dem selben Alter kennt, können wir Paare mit 96 verschiedenen Altern bilden, total gibt es also eine Gruppe von 192 Dorfbewohnern, in welchen keine drei Personen das selbe Alter haben. Dies widerspricht de Rham's zweiter Bedingung. Da wir nun wissen, dass es höchstens 95 verschiedene Alter gibt, können wir das Schubfachprinzip anwenden und sehen, dass mindestens eine Altersgruppe von mindestens $\lceil \frac{2020}{95} \rceil = 22$ Dorfbewohnern repräsentiert wird. Bemerke, dass 96 verschiedene Alter zum selben Resultat führen, die stärkste Bedingung also 194 anstatt 192 ist.

**Marking Scheme:** Die ersten beiden Punkte sind nicht additiv.

- 2P: Beweis, dass die Aussage stimmt, falls es höchstens $k$ verschiedene Altersgruppen gibt für ein $k \in \{95, 96\}$
- 1P: Beweis, dass die Aussage stimmt, falls es höchstens $k$ verschiedene Altersgruppen gibt für ein $k \in \{92, 93, 94\}$
- 5P: Beweis dafür, dass es höchstens $k$ Altersgruppen gibt für ein $k \in \{95, 96\}$

**Z1)** Falls $p \geq 5$ eine Primzahl ist, sei $q$ die kleinste Primzahl sodass $q > p$ und sei $n$ die Anzahl der positiven Teiler von $p+q$ (1 und $p+q$ inklusive).

a) Zeige, dass egal welche Primzahl $p$ gewählt wurde, die Zahl $n$ grösser oder gleich 4 ist.

b) Finde den kleinstmöglichen Wert $m$, den $n$ annehmen kann unter allen möglichen Wahlen von $p$. Das heisst:

$b_1$) Gib ein Beispiel für eine Primzahl $p$ an, sodass der Wert $m$ erreicht wird.

$b_2$) Zeige, dass es keine Primzahl $p$ gibt für die der Wert von $n$ kleiner als $m$ ist.

**Lösung:** Da $p \geq 5$, sind die beiden Primzahlen $p, q$ beide ungerade und somit $p+q$ gerade, also $p+q$ durch $1, 2, \frac{p+q}{2}$ und $p+q$ teilbar. Zusätzlich ist $p+q > 4$ und somit sind die genannten Teiler alle unterschiedlich. Dies beweist Teil a).

für Teil $b_1$) können wir kleine Fälle von $p$ testen und sehen, dass $n$ nicht kleiner als 6 zu sein scheint. Wir sehen auch, dass $p+q$ genau 6 Teiler hat wenn $p = 5$, $q = 7$ (Diese wären $1, 2, 3, 4, 6, 12$).

Für $b_2$) ist die Kernidee, dass $\frac{p+q}{2}$ keine Primzahl ist, da sie zwischen den aufeinanderfolgenden Primzahlen $p$ und $q$ liegt. ($p < \frac{p+q}{2} < q$). Es gibt nun einige Fälle, die wir untersuchen müssen:

- Falls $\frac{p+q}{2}$ durch zwei unterschiedliche Primzahlen $s, t \neq 2$ teilbar ist, dass hat $p+q$ mindestens 8 Teiler: $1, 2, s, t, 2s, 2t, st, 2st$.
- Falls $\frac{p+q}{2}$ durch $2, s$ teilbar ist, wobei $s \neq 2$ prim ist, dann hat $p+q$ mindestens 6 Teiler: $1, 2, 4, s, 2s, 4s$.
- Falls $\frac{p+q}{2}$ durch $s^2$ teilbar ist mit $s \neq 2$ prim, dann hat $p+q$ auch mindestens 6 Teiler: $1, 2, s, 2s, s^2, 2s^2$.
- Falls $\frac{p+q}{2}$ eine Zweierpotenz ist, dann ist $p+q$ auch eine. Weil nun $32 = 2^5$ genau 6 Teiler hat und jede höhere Zweierpotenz auch durch diese 6 Teiler teilbar ist, genügt es zu beweisen, dass $p+q$ keine Zweierpotenz kleiner als 32 sein kann. Da $5 \leq p < q$, folgt, dass $p+q > 8$ und somit ist der einzige übrige Fall, dass $p+q = 16$. Wir sehen, dass $5+7 = 12 < 16$ und $7+11 = 18 > 16$. Weil jedes $p > 7$ eine noch höhere Summe ergibt, schlussfolgern wir, dass $p+q = 16$ nicht möglich ist.

**Marking Scheme**

- 1P : Beweis, dass $n \geq 4$.
- 1P : Behaupte den richtigen Wert $m = 6$ mit einem expliziten Beispiel.
- 2P : Beweis, dass $\frac{p+q}{2}$ keine Primzahl ist.
- +3P : Den Beweis beenden.

Falls in der Fallunterscheidung ein Fall ausgelassen wird, zählt dies nicht als kleiner Fehler und höchstens 5 Punkte können erreicht werden.

**Z2)** Sei $p$ eine Primzahl und $a, b, c$ und $n$ positive ganze Zahlen mit $a, b, c < p$, sodass die drei folgenden Aussagen gelten:

$$p^2 \mid a + (n-1) \cdot b, \qquad p^2 \mid b + (n-1) \cdot c, \qquad p^2 \mid c + (n-1) \cdot a.$$

Zeige, dass $n$ keine Primzahl ist.

**1. Lösung (Louis):** Der wichtigste Schritt ist, die drei Bedingungen zu addieren. Wir erhalten:

$$p^2 \mid \big(a + (n-1) \cdot b\big) + \big(b + (n-1) \cdot c\big) + \big(c + (n-1) \cdot a\big) = n \cdot (a + b + c).$$

Da $a, b, c < p$, haben wir $a + b + c \leq 3p - 3 < 3p$ und falls $p \geq 3$, folgt $a + b + c < p^2$. Nun teilt $p^2$ nicht $a + b + c$ und somit $p \mid n$. Wir schreiben nun $n = k \cdot p$ (somit ist $n$ eine Primzahl nur falls $k = 1$). Aus der ersten Bedingung folgt, dass $p^2 \mid a + (kp-1) \cdot b = a - b + kpb$. Wir müssen also $p \mid a - b$ haben und weil $a, b$ beide strikt zwischen 0 und $p$ liegen, ist die einzige Möglichkeit $a = b$. Abermals aus der ersten Bedingung folgt nun $p^2 \mid a + nb - b = nb$ und da $b$ teilerfremd zu $p$ ist (weil $b < p$), gilt $p^2 \mid n$, also ist $n$ keine Primzahl.

Da wir am Anfang angenommen haben, dass $p \geq 3$, müssen wir nun noch den Fall $p = 2$ betrachten. Hier müssen wir $a = b = c = 1$ nehmen und somit gilt abermals $a = b$ und wir beenden den Beweis wie zuvor.

**2. Lösung (David):** Wie in der ersten Lösung zeigen wir zuerst $p \mid n$. Daraus folgt, dass $n$ nur eine Primzahl sein kann, falls $n = p$ gilt. Nehme also an, es gelte $n = p$. Aus der ersten Teilbarkeitsbedingung erhalten wir $p^2 \leq a + (n-1) \cdot b$. Andererseits gilt wegen $a, b < p$ auch $a + (n-1) \cdot b = a + (p-1) \cdot b < p + (p-1) \cdot p = p^2$. Wir erhalten also insgesamt $p^2 < p^2$ und damit einen Widerspruch.

Wie in der vorigen Lösung müssen wir noch $p = 2$ separat betrachten. Dies funktioniert aber genau gleich wie in der ersten Lösung..

**Marking Scheme:**

- 2P: Beweis, dass $p^2 \mid n \cdot (a + b + c)$.
- +2P : Beweis, dass $p \mid n$.
- +2P : Beweis, dass $a = b$ **oder** dass $a + (n-1)b < p^2$ gilt (oder eine andere Beobachtung, die den Beweis einfach vervollständigt).
- +1P : Den Beweis beenden.

Es wird 1 Punkt subtrahiert, falls der Beweis eine endliche Anzahl $p$ nicht berücksichtigt.