



Funktionalgleichungen

Thomas Huber, Arnaud Maret

Aktualisiert: 19. Januar 2020
vers. 2.1.0

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines und Einleitung

Willkommen in der Welt der Funktionalgleichungen! Das ist eine Welt voll mit geheimnisvollen Kreaturen, bekannt unter dem Namen *Funktionalgleichungen*. Für manche Personen sind diese Funktionalgleichungen ganz gewöhnliche Probleme. Andere fürchten sie. Nun ist auch dein Abenteuer in dieser wunderlichen Welt der Funktionalgleichungen auf bestem Wege zu beginnen! Eine Welt der Träume und Abenteuer mit atemberaubender Vielfalt an verschiedensten Funktionalgleichungen erwartet dich. Auf geht's!

Bevor man das Konzept einer Funktionalgleichung verstehen kann, muss man verstehen, was eine *Funktion* eigentlich ist.

1.1 Verstehen des Begriffs einer *Funktion*

Eine Funktion f beschreibt eine Relation zwischen einer Definitionsmenge, sagen wir \mathcal{A} , und einer Zielmenge, sagen wir \mathcal{B} . Sie ordnet jedem Element a in \mathcal{A} ein eindeutiges Element b in \mathcal{B} zu, man nennt dieses b *Bild von a unter f* . Für gewöhnlich schreibt man in diesem Fall $b = f(a)$; auf diese Weise sieht man sofort an der Notation, dass b das Bild von a unter f ist.

Man benutzt folgende Notation um eine Funktion zu definieren:

$$\begin{aligned} f: \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{B} \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Zum Beispiel

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

ist eine Funktion, welche jeder reellen Zahl x die reelle Zahl $f(x) = x^2 + 1$ zuordnet. In diesem Fall haben wir eine einfache arithmetische Rechenvorschrift, welche es uns erlaubt, das Bild einer Zahl x zu berechnen.

In anderen Fällen kennt man keine solchen einfachen Rechenvorschriften zur exakten Berechnung des Bildes eines Elements der Definitionsmenge. Betrachten wir beispielsweise die Funktion:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto p(n), \end{aligned}$$

wobei $p(n)$ die n -te Primzahl ist. Für diese Funktion muss man sich mit der Notation $p(n)$ begnügen um vom Bild einer natürlichen Zahl n zu sprechen, da man (bis jetzt) über keine explizite Formel zur Berechnung des Bildes verfügt.

Hier bereits eine Bemerkung zu den Funktionalgleichungen: Die Funktionen, mit denen ihr zu tun haben werdet, werden alle fast vollkommen durch „schöne“ explizite Formeln definierbar sein. Doch nochmals, das ist keine universelle Eigenschaft von Funktionen, und viele (in einem mathematisch wohldefinierten Sinne sogar die überwiegende Mehrheit) können nicht durch eine explizite Formel beschrieben werden. Gewöhnt euch also nicht an, diese „abnormalen“ Funktionen auszugrenzen.

Der zentrale Punkt im Begriff einer Funktion ist die Eindeutigkeit des Bildes. Wenn man zum Beispiel jeder ganzen Zahl n all seine verschiedenen Teiler zuordnet, erhält man eine Relation von \mathbb{Z} nach \mathbb{Z} die keine Funktion ist.

Andererseits ist es keineswegs untersagt, dass ein Element aus der Zielmenge das Bild von mehreren Elementen der Definitionsmenge ist. Wenn wir zum Beispiel die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ betrachten, dann ist 2 das Bild sowohl von 1 als auch von -1 .

Analog ist es auch durchaus erlaubt, dass es Elemente in der Zielmenge gibt, die nicht das Bild eines Elements der Definitionsmenge sind, obwohl man voraussetzt, dass jedes Element der Definitionsmenge ein Bild in der Zielmenge besitzt. Betrachten wir beispielsweise erneut die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 + 1,$$

dann gibt es keine reelle Zahl, deren Bild unter f die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ ist, da kein x in \mathbb{R} existiert sodass $0 = x^2 + 1$.

In den folgenden Problemen werden wir zumeist Funktionen einer Variablen betrachten. Funktionen also, die *eine* Zahl auf eine andere schicken. Nichtsdestotrotz gibt es Aufgaben, welche Funktionen mehrerer Variablen betreffen, die ein Tupel von Zahlen auf ein anderes Tupel von Zahlen schicken. Zum Beispiel schickt die Funktion

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \\ (a, b) \mapsto f(a, b) = \frac{a}{b}$$

ein Paar ganzer Zahlen, wobei die zweite strikt positiv ist, auf den Quotienten der ersten durch die zweite.

Auf den ersten Blick kann das Konzept einer Funktion ganz schön abstrakt scheinen. Man kann diesen Begriff aber wie folgt visualisieren: man sieht eine Funktion als eine Menge von Pfeilen an, die von den Elementen einer Menge zu den Elementen einer anderen Menge zeigen, wobei aus jedem Element der Startmenge genau ein Pfeil hervorgeht.

Für Funktionen einer reellen Variablen existiert eine geometrische Veranschaulichung die man *Graph* der Funktion nennt. Dabei zeichnet man in ein Koordinatensystem zweier

Achsen alle Punkte $(x, f(x))$ für jedes x aus der Definitionsmenge ein. Viele der Eigenschaften, die wir später antreffen werden, besitzen hierdurch eine geometrische (heißt visuelle) Interpretation.

Mit diesen Hilfsmitteln sollte der Begriff einer Funktion für all jene, die sich den Umgang mit ihm nicht gewohnt sind, allmählich klarer werden. Weitere Eigenschaften von Funktionen werden später definiert. Beginnen wir nun mit ein paar allgemeinen Betrachtungen einiger erster Funktionalgleichungen.

1.2 Was ist eine Funktionalgleichung?

Eine *Funktionalgleichung* ist eine Gleichung, deren Unbekannte eine Funktion ist. Wenn man von einer Gleichung spricht, möchte man zumeist alle Werte finden, für die zwei algebraische Ausdrücke gleich sind. Bei einer Funktionalgleichung möchte man nun alle algebraischen Ausdrücke finden, für welche eine Gleichung für alle Werte aus einer gegebenen Menge erfüllt ist. Es ist also in gewisser Weise die Umkehrung des Problems.

Zum Beispiel gilt für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ offenbar

$$f(x)f(y) = f(xy),$$

für beliebige reelle Zahlen x, y in \mathbb{R} , da für jedes solche Paar $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x)f(y) = x^2y^2 = (xy)^2 = f(xy)$ nach den üblichen Potenzregeln erfüllt ist. Darüber hinaus bemerkt man, dass jede Funktion $x \mapsto x^a$ eine Lösung der Funktionalgleichung ist.

Für gewöhnlich haben Funktionalgleichungsaufgaben die folgende Form :

Beispiel 1. (*IMO 92*) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Wir werden später zeigen, dass die einzige Lösung dieser Gleichung die Identitätsfunktion $x \mapsto x$ ist. Ihr könnt euch gerne davon überzeugen, dass das tatsächlich eine Lösung der Gleichung ist.

Es gibt jedoch auch völlig andere Funktionalgleichungen. Sie können eine oder mehrere Variablen haben. Es können einzelne Gleichungen sein oder Systeme von Gleichungen für eine oder mehrere Funktionen. Die Funktionen müssen auch nicht immer reelle sein, der Definitionsbereich ist oft \mathbb{Q} , \mathbb{N} oder irgendeine andere Menge, wie beispielsweise \mathbb{R}^+ .

Oft bezeichnet man als Funktionalgleichung jedes Problem, welches Funktionen betrifft und dessen Lösung einiger Berechnungen und Manipulationen von Ausdrücken bedarf. Hier einige Beispiele, die zwar von der gewöhnlichen Formulierung abweichen, aber dennoch zu den Funktionalgleichungen gezählt werden:

Beispiel 2. (*IMO 93*) Entscheide, ob es eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, sodass $f(1) = 2$ und sodass für alle n in \mathbb{N}

$$(a) f(f(n)) = f(n) + n$$

$$(b) f(n) < f(n+1).$$

Beispiel 3. (IMO 02) Bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle reellen Zahlen x, y, z, t

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass f auch mehrere Argumente haben kann:

Beispiel 4. (IMO 81) Die Funktion $f(x, y)$ erfülle die folgenden Gleichungen für alle $x, y \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y + 1, \\ f(x + 1, 0) &= f(x, 1), \\ f(x + 1, y + 1) &= f(x, f(x + 1, y)). \end{aligned}$$

Bestimme $f(4, 1981)$.

Nach diesem Rundblick sollte klar geworden sein, was die typische Problemstellung ist. Eine ganz andere Frage ist allerdings, wie man nun vorgeht, um die Lösungen einer solchen Funktionalgleichung zu bestimmen. Oft sieht man recht schnell eine Lösung und ist sich auch recht sicher, dass es die einzige ist. Dies aber wirklich zu beweisen, ist die Hauptschwierigkeit. Es gibt nur ganz wenige Standardverfahren, die man anwenden kann. Meistens muss man einfach herumprobieren, mit der Gleichung spielen, bis sie Informationen preisgibt, die man weiterverwenden kann. Das Wichtigste überhaupt beim Lösen solcher Funktionalgleichungen ist die Erfahrung. Erst mit einiger Übung wird man erkennen, worauf es eigentlich ankommt, wonach man suchen muss. Dieses Skript soll euch diese Erfahrung geben. Es enthält viele ausführliche Lösungen zu Beispielen und viele Aufgaben, an denen ihr euer Können unter Beweis stellen könnt.

1.3 Klassisches Schema für's Aufschreiben

Obgleich es nur wenige Standardverfahren zur Lösung einer Funktionalgleichung gibt, existiert nichtsdestotrotz ein Grundschema für das Aufschreiben einer Lösung an einer Olympiade.

Eine Lösung sollte stets mit dem Satz: "Sei f eine Lösung der Gleichung" beginnen, oft lässt man ihn aber aus Gewohnheit weg.

Anschliessend bestimmt man immer stärker einschränkende Eigenschaften, die eine solche Lösung f erfüllen muss, bis man schliesslich ihre explizite Form bestimmen kann. Man schreibt dann beispielsweise "... somit ist gezwungenermassen $f(x) = x^2 + 1$ für alle reellen Zahlen x ."

Äusserst wichtig ist auch folgendes: Eine Lösung ist erst vollständig, wenn überprüft wird, dass die gefundenen Funktionen tatsächlich Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind.

Oft vergisst man diesen Schritt, er scheint schlicht zu trivial. Dennoch handelt es sich hierbei um einen essentiellen Bestandteil einer Lösung, und falls dieser fehlt, wird dies ausnahmslos durch das Abziehen einiger Punkte bestraft. Ihr werdet es noch sehr oft hören, und man kann es auch eigentlich nie genug sagen: **Immer überprüfen, dass die Lösungsfunktionen die ursprüngliche Gleichung erfüllen !**

2 Grundlegende Lösungstechniken

2.1 Einsetzen

Dieser Abschnitt behandelt die wohl naheliegendste Lösungstechnik, das *Einsetzen*. Wenn eine Funktion f eine gegebene Gleichung beispielsweise für alle x, y in \mathbb{R} erfüllt, dann bleibt diese Gleichung auch für eine bestimmte Wahl von x und y erhalten.

2.1.1 Grundlegende Substitutionen

Im Allgemeinen, wenn man eine Funktionalgleichung angeht, dann beginnt man immer mit einigen Standardsubstitutionen. Diese können häufig hilfreich sein, die Bilder unter f einiger Schlüsselwerte zu bestimmen; zumeist $f(0)$ oder $f(1)$. Eine raffinierte Folge solcher grundlegenden Substitutionen reicht manchmal schon zum Lösen einer Aufgabe, sogar für recht komplizierte! Hier ein Beispiel.

Beispiel 5. *Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}*

$$f(xy) = xf(x) + yf(y).$$

Lösung. Sei f eine Lösung der obigen Gleichung.

Nach dem Lösen einiger erster Funktionalgleichungen werdet ihr schnell merken, dass es für Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} oft äusserst hilfreich ist, die möglichen Werte von $f(0)$ zu kennen. In unserem Fall kann mit dem Einsetzen von $x = y = 0$ beginnen. Man erhält nach Berechnung: $f(0) = 0$. Somit muss jede Lösungsfunktion der Gleichung die Bedingung $f(0) = 0$ erfüllen.

Schauen wir nun was passiert, wenn man $y = 0$ einsetzt und x als unabhängige Variable behält. Man erhält

$$xf(x) = f(0) = 0.$$

Diese Gleichung ist für alle reellen Zahlen x erfüllt. Somit erhält man für alle reellen x , dass entweder $x = 0$, oder $f(x) = 0$, daher ist $f(x) = 0$ wenn man $x \neq 0$ nimmt. Da man aber schon weiss, dass $f(0) = 0$ kommt man zum Schluss, dass f die Nullfunktion sein muss, also $f(x) = 0$ für alle x in \mathbb{R} .

Die letzte Etappe besteht im Überprüfen, dass die Nullfunktion tatsächlich eine Lösung der Ursprungsgleichung ist. Man sieht, dass

$$0 = x \cdot 0 + y \cdot 0,$$

für alle x, y in \mathbb{R} .

Somit haben wir gezeigt, dass diese Funktionalgleichung eine eindeutige Lösung besitzt; die Nullfunktion.

□

Betrachten wir ein weiteres grundlegendes Beispiel.

Beispiel 6. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}^+

$$xf(xy) = f(y).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wenn wie hier der Wert 0 nicht erlaubt ist, dann lohnt es sich meistens, die Substitution $x = 1$ und/oder $y = 1$ auszuprobieren. Wir sehen, dass $x = 1$ zu der Gleichung $f(y) = f(y)$ führt, welche nutzlos ist. Wir setzen also $y = 1$ in die Ursprungsgleichung ein. Das ergibt:

$$xf(x) = f(1)$$

für jeden Wert von x in \mathbb{R}^+ . Da x hier nie 0 ist, darf man beide Seiten der Gleichung durch x teilen, dies führt zu

$$f(x) = \frac{f(1)}{x}. \quad (1)$$

Nun ist es wichtig festzustellen, vor allem wenn man gerade erst mit dem Lösen von Funktionalgleichungen begonnen hat, dass $f(1)$ hier nichts weiter als eine Konstante ist. In einigen Beispielen, dieses gehört dazu, kann man den Wert von $f(1)$ (oder von $f(0)$ in anderen Beispielen) nicht eindeutig bestimmen, da die Gleichung mehr als eine Lösungsfunktion zulässt und nicht jede Lösung bei 1 den gleichen Wert annimmt.

Die Gleichung (1) ist wie folgt zu interpretieren : wenn f eine Lösung der Ursprungsgleichung ist, dann

$$f(x) = \frac{c}{x},$$

wobei c eine Konstante in \mathbb{R}^+ ist.

Wie immer muss man nun überprüfen, dass für jede Wahl von c in \mathbb{R}^+ die Funktion $x \mapsto c/x$ eine Lösung der Ursprungsgleichung ist. Tatsächlich sieht man, dass für alle x, y in \mathbb{R}^+

$$x \cdot \frac{c}{xy} = \frac{c}{y}.$$

□

In diesem Beispiel haben wir gezeigt, dass die Funktionalgleichung unendlich viele Lösungen besitzt, gegeben durch alle Funktionen der Form $x \mapsto \frac{c}{x}$, wobei c eine strikt positive, reelle Konstante ist.

Betrachten wir ein letztes Beispiel; eine etwas subtilere Gleichung, die dennoch eine Lösung bestehend ausschliesslich aus grundlegenden Substitutionen zulässt. Diese Gleichung war die Aufgabe 9 an der Finalrunde 2005.

Beispiel 7. (Finalrunde 2005) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}^+

$$f(yf(x))(x+y) = x^2(f(x) + f(y)).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung. Erneut arbeiten wir in \mathbb{R}^+ , wir konzentrieren uns in den ersten Substitutionen also eher auf die Zahl 1. Wir versuchen also zuallererst (ein Grundreflex) die Substitution $x = y = 1$ in der Ursprungsgleichung. Wir erhalten nach Berechnung :

$$f(f(1)) = f(1). \quad (2)$$

Wir können also nicht direkt den Wert von $f(1)$ bestimmen. Andererseits haben wir eine interessante Eigenschaft des Werts $f(1)$ gefunden. Hier ist Hartnäckigkeit gefordert; es sind weitere Substitutionen nötig um mehr Informationen über $f(1)$ zu erhalten. Man überzeuge sich, dass $f(1)$ nichts weiter als eine reelle Zahl ist, somit ist es durchaus erlaubt (und sogar wünschenswert !) Substitutionen der Form $(x, y) = (1, f(1))$, $(x, y) = (f(1), 1)$ oder sogar $(x, y) = (f(1), f(1))$ auszuprobieren und die Eigenschaft (??) benutzen um die so erhaltenen Identitäten zu vereinfachen.

In unserem Fall ergibt das Einsetzen von $x = f(1)$ und $y = 1$, unter Verwendung der Eigenschaft (??) um die doppelten f 's zu vereinfachen und durch Faktorisieren der resultierenden Gleichung

$$(f(1) - 1)(2f(1) + 1) = 0.$$

Daraus schliesst man $f(1) = 1$ oder $f(1) = -1/2$. Da die Zielmenge \mathbb{R}^+ ist, kann man Letzteres aber ausschliessen und somit gilt $f(1) = 1$. Da wir diese neue Gleichung benutzen möchten, versuchen wir die Substitution $x = 1$. Wir erhalten nach Umordnen der Terme

$$yf(y) = 1.$$

Da y strikt positiv ist, dürfen wir durch y teilen, dies führt zu $f(y) = 1/y$. Es bleibt noch zu überprüfen, dass die Funktion $x \mapsto 1/x$ die Ursprungsgleichung erfüllt. Wir sehen, dass

$$\frac{1}{y\frac{1}{x}}(x+y) = \frac{x^2}{y} + x = x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

□

2.1.2 Funktionelle Substitutionen

Wir haben die obigen Beispiele gelöst, indem wir Konstanten für die freien Variablen x und y eingesetzt haben. Da im Allgemeinen die Gleichungen für alle Werte der Variablen erfüllt sind, müssen wir uns aber keineswegs auf das Einsetzen von vorbestimmten Werten für x und y beschränken, wir können beispielsweise auch einen Ausdruck in Abhängigkeit von y für x einsetzen. Betrachten wir folgendes Beispiel, um den Gebrauch solcher Substitutionen aufzuzeigen.

Beispiel 8. *Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}*

$$x + 2f(x) + f(f(y) - x) = y.$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wie gewöhnlich beginnen wir mit einigen Standardsubstitutionen. Mit $x = 0$ erhalten wir

$$f(f(y)) = y - 2f(0).$$

Eine solche Gleichung ist stets hilfreich, da sie erlaubt doppelte f 's zu vereinfachen.

Der komplizierteste Term der Gleichung ist $f(f(y) - x)$. Es kann daher äusserst nützlich sein zu versuchen, ihn loszuwerden. Dies erreicht man am einfachsten, wenn man $x = f(y)$ einsetzt. Gerade am Anfang einer zukünftigen Funktionalgleichungsweltkarriere ist es sehr wichtig zu verstehen, warum eine solche Substitution erlaubt ist. Die Gleichung ist für jeden reellen Wert von x erfüllt, und das unabhängig von der Wahl von y . Sie bleibt also insbesondere erfüllt, wenn x von y abhängt.

Man erhält nach Vereinfachen der doppelten f 's mit Hilfe der obigen Identität

$$f(y) = -y + 3f(0).$$

Setzen wir nun noch $y = 0$ in diese letzte Gleichung ein, erhalten wir $f(0) = 3f(0)$ und daher $f(0) = 0$. Die obige Gleichung wird also zu $f(y) = -y$.

Es bleibt noch zu überprüfen, dass die Funktion $x \mapsto -x$ die Ursprungsgleichung erfüllt. Man sieht schnell, dass

$$x - 2x - ((-y) - x) = y.$$

□

Betrachten wir nun ein Beispiel, welches ein bisschen weniger dem Standard entspricht. Es handelt sich um eine *Funktionalungleichung*. Keine Panik! Die Vorgehensweise beim Lösen eines solchen Problems bleibt im Kern die selbe.

Beispiel 9. *Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}*

$$f(x + y) \geq f(xy).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Ungleichung.

Es lohnt sich stets, das Lösen einer Funktionalgleichung mit dem Identifizieren der Lösungsfunktionen zu beginnen. Hierzu sollte man die üblichen Funktionen durchtesten (die konstanten Funktionen $x \mapsto c$, die linearen Funktionen $x \mapsto ax + b$, insbesondere $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$, aber auch $x \mapsto \pm x^2$, $x \mapsto c/x$, etc).

In diesem Beispiel erfüllen aus der obigen Liste nur die konstanten Funktionen die Ungleichung. Wir probieren also zu zeigen, dass nur konstante Funktion das Problem lösen. Wir beginnen wie so oft mit dem Einsetzen von $y = 0$. Man erhält

$$f(x) \geq f(0)$$

für alle x in \mathbb{R} . Wäre es also möglich, die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, nämlich $f(x) \leq f(0)$ für alle reellen x , dann hätte man $f(x) = f(0)$ und somit wären wir fertig.

Wir versuchen also, auf der linken Seite des Ungleichheitszeichens ein $f(0)$ auftauchen zu lassen. Dies erreicht man mit der sehr natürlichen Substitution $y = -x$. Sie führt zu

$$f(0) \geq f(-x^2).$$

Das Problem hier ist, dass man nicht alle reellen Zahlen als "minus das Quadrat einer reellen Zahl" ausdrücken kann. Wir erhalten die Gleichung $f(t) = f(0)$ lediglich für jene t , die sich als $t = -x^2$ für eine bestimmte reelle Zahl x schreiben lassen. Man sieht schnell, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $t \leq 0$, weil dann $t = -(\sqrt{-t})^2$, und dieser Ausdruck ist nicht definiert für $t > 0$. Wenn $t \leq 0$ setzen wir diesen Ausdruck in obige Gleichung ein und erhalten $f(0) \geq f(t)$. Zusammen mit unserer ersten Ungleichung ergibt das

$$f(t) = f(0)$$

für alle $t \leq 0$ in \mathbb{R} .

Eine andere Standardsubstitution, die häufig nützliche Informationen liefert, ist der Klassiker $x = y$. Damit erhalten wir

$$f(2x) \geq f(x^2).$$

Rufen wir uns in Erinnerung, dass wir die Ungleichung $f(0) \geq f(t)$ für $t > 0$ beweisen wollen. Wir versuchen also, ein (t) auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens auftauchen zu lassen. Einfach $x = \sqrt{t}$ einzusetzen führt hier zu nichts, weil wir nichts über den Term $f(2\sqrt{t})$ aussagen können. Wenn wir hingegen, und hier liegt die Subtilität des Ganzen, $x = -\sqrt{t}$ setzen, ändert dies alles, weil wir bereits wissen, dass $f(-2\sqrt{t}) = f(0)$, da $-2\sqrt{t} < 0$. Man erhält daher für $t > 0$

$$f(0) = f(-2\sqrt{t}) \geq f(t).$$

Zusammen mit der umgekehrten Ungleichung und früheren Resultaten können wir also schliessen, dass $f(t) = f(0)$ für alle t in \mathbb{R} .

Zum Schluss überprüft man mit Leichtigkeit, dass alle konstanten Funktionen $x \mapsto c$ die Ursprungsungleichung erfüllen. \square

Betrachten wir ein letztes Beispiel. Dieses Problem wurde als Aufgabe 4 der Finalrunde 2004 gestellt. Die Lösung besteht aus drei Teilen, wobei der kniffligste der zweite Teil ist. Dieses Beispiel ist recht elementar nach meinem Geschmack und ich lade euch ein, es etwas eingehender zu studieren.

Beispiel 10. (Finalrunde 2004) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R} ,

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung. Der erste Teil besteht wie so oft in der Berechnung des Wertes von $f(0)$. Ihr könnt diesen Teil erstmal auslassen und später darauf zurückkommen, nachdem wir das Kapitel über die *Surjektivität* behandelt haben. Mit diesem Kapitel wird dieser erste Teil um einiges klarer sein.

Das Setzen von $x = y = 0$ ergibt

$$f(f(0)) = f(0)^2. \tag{3}$$

Mit der Substitution $x = 0$ und $y = -f(0)^2$, erhält man $f(f(-f(0)^2)) = 0$. Anders gesagt, setzt man $a := f(-f(0)^2)$, dann gilt $f(a) = 0$. Solche Argumente werden im Zusammenhang mit dem Begriff der Surjektivität noch öfters auftreten.

Setzen wir $x = y = a$, so ergibt das $f(0) = a$. Anwenden von f auf beide Seiten der Gleichung liefert $f(f(0)) = f(a) = 0$. Zusammen mit (??) erhält man $f(0)^2 = 0$ und somit $f(0) = 0$.

Da wir nun den Wert von $f(0)$ kennen, setzen wir sogleich (beflissen wie wir sind) erst $x = 0$ und dann $y = 0$ um zu sehen, ob wir das Ergebnis $f(0) = 0$ irgendwie brauchen können.

$$f(f(y)) = y$$

und

$$f(xf(x)) = f(x)^2,$$

erst für alle y in \mathbb{R} , dann für alle $x \in \mathbb{R}$. Die erste sieht einfacher aus, daher versuchen wir, mit ihr die zweite zu vereinfachen. Wie schaffen wir es, doppelte f 's in der zweiten Gleichung auftauchen zu lassen? Die Idee ist, eine Substitution der Form $x = f(t)$ durchzuführen, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist. Um aber sparsam mit Buchstaben und Variablen umzugehen, gehen wir wie folgt vor: wir ersetzen alle x durch $f(x)$ (statt x mit $f(t)$ zu ersetzen). Damit erhält man

$$f(f(x)f(f(x))) = f(f(x))^2.$$

Dieser Ausdruck scheint um einiges komplizierter als der ursprüngliche, aber er lässt sich vereinfachen wenn man $f(f(y)) = y$ miteinbezieht. Man erhält

$$f(xf(x)) = x^2.$$

Zusammen mit vorherigen Gleichung, aus welcher wir diese hergeleitet haben, ergibt dies $f(x)^2 = x^2$. Ist als x in \mathbb{R} beliebig, dann gilt entweder $f(x) = x$, oder $f(x) = -x$. Aber Achtung, das bedeutet nicht, dass wir als einziges die beiden Lösungsfunktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$ erhalten ! Wir wissen nur, dass wenn f eine Lösung der Ursprungsgleichung ist, dann gilt $f(x) = x$ für einige Werte von x und $f(x) = -x$ für andere. Die gar nicht mal so abnormale Funktion $x \mapsto |x|$ fällt auch in diese Kategorie, doch scheint sie keine Lösung der Ursprungsgleichung zu sein. Wir kehren also zur Ursprungsgleichung zurück um mehr über die Struktur der Lösungen herauszufinden.

Erinnern wir uns, dass $f(0) = 0$. Nehmen wir nun also an, dass es reelle Zahlen $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ gibt, sodass $f(x_1) = x_1$ respektive $f(x_2) = -x_2$ um zu sehen, ob eine Mischung der Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$ eine mögliche Lösung der Gleichung ist.

Mit $x = x_1$ und $y = x_2$ erhält man

$$f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 + x_2.$$

Andererseits wissen wir, dass $f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 - x_2$ oder $f(x_1^2 - x_2) = -x_1^2 + x_2$. Kombiniert man dies mit der obigen Gleichung, erhält man im ersten Fall $x_2 = 0$ und im zweiten Fall $x_1 = 0$. Beides steht im Widerspruch zu unserer Wahl von x_1 und x_2 . Somit haben wir gezeigt, dass f nicht eine Kombination aus $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$ sein kann. Daher bleiben nur zwei mögliche Lösungen : die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$.

Eine einfache Berechnung zeigt, dass $x \mapsto x$ eine Lösung der Ursprungsgleichung ist. Auch die Funktion $x \mapsto -x$ ist eine Lösung, da

$$-(x \cdot (-x) - y) = x^2 + y = (-x)^2 + y.$$

□

Lasst uns, bevor wir dieses Kapitel über Substitutionen abschliessen, ein paar take-away Schlüsselerkenntnisse mitnehmen. Am Anfang empfiehlt es sich, eine Funktionalgleichung mit den Standardsubstitutionen, also $x, y = 0$, $x, y = \pm 1$, $x = \pm y$ oder gar manchmal $x = \pm 1/y$, anzugreifen. Oft reichen diese Substitutionen aus, um $f(0)$ und $f(1)$ zu berechnen. Und wichtig : sobald ihr etwas neues herausfindet über eine Lösungsfunktion f , überlegt umgehend, wie ihr diese neue Erkenntnis kreativ gebrauchen könnt, um noch mehr über f herauszufinden !

2.2 Funktionalgleichungen über \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q}

Bis hierhin haben wir ausschliesslich Beispiele gesehen, in welchen die Argumente der Funktion reell waren. Manchmal sucht man aber auch Funktionen, deren Argumente lediglich ganze, oder rationale Zahlen sind. Hierbei kommen neue Methoden ins Spiel, wie beispielsweise Resultate aus der Zahlentheorie über Teilbarkeit und Kongruenzen. Der wichtigste Ansatz bleibt aber die Induktion. Betrachten wir umgehend ein grundlegendes Beispiel.

Beispiel 11. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sodass für alle m, n in \mathbb{Z}

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Versucht man ein paar Lösungen zu finden, so sieht man, dass die Funktionen der Form $n \mapsto cn$ die einzigen Lösungen zu sein scheinen. Man beachte, dass wenn $f(n) = cn$, dann ist $f(1) = c$. Wir werden also zeigen, dass die einzigen Lösungen jene der Form $n \mapsto f(1)n$ sind.

Behalten wir unsere Reflexe aus dem ersten Kapitel bei und versuchen die Substitution $m = n = 0$. Sie ergibt $f(0) = 0$.

Wie bereits erwähnt ist das wichtigste Lösungsverfahren bei solchen Funktionalgleichungen die Induktion. Wir versuchen also, aus unserer Gleichung eine Formel herzuleiten, welche den Wert von $f(n+1)$ mit jenem von $f(n)$ in Verbindung setzt, oder allgemeiner, eine Formel welche den Wert von $f(n)$ mit jenen von $f(n-1), \dots, f(0)$ in Verbindung setzt. Setzt man $m = 1$, so ergibt das

$$f(n+1) = f(n) + f(1).$$

Erinnern wir uns daran, dass wir $f(1)$ als konstanten Parameter festsetzen wollen. Diese Gleichung ist wie folgt zu interpretieren: verfüge ich über den Wert von $f(n)$, dann kann ich den Wert von $f(n+1)$ berechnen. Wir verwenden also eine Induktion um erst einmal zu zeigen, dass $f(n) = nf(1)$ für $n \geq 0$. Wir wissen bereits das $f(0) = 0 = f(1) \cdot 0$. Nehmen wir also an, dass $f(n_0) = f(1)n_0$ für ein vorgegebenes $n_0 \geq 0$. Wir haben demnach

$$f(n_0+1) = f(n_0) + f(1) = f(1)n_0 + f(1) = f(1)(n_0+1),$$

und daher können wir schliessen, dass $f(n) = f(1)n$ für alle $n \geq 0$.

Die (natürliche!) Substitution $m = -n$ in der Ursprungsgleichung ergibt $f(n) = -f(-n)$, da wir ja bereits $f(0) = 0$ gezeigt haben. Ist somit $n < 0$, dann gilt

$$f(n) = -f(-n) = -(-nf(1)) = f(1)n,$$

denn wenn $n < 0$, dann ist $-n > 0$ und wir wissen durch unsere Induktion, wie wir die Bilder von positiven ganzen Zahlen berechnen. Wir können daher schliessen, dass $f(n) = f(1)n$ für alle n in \mathbb{Z} .

Man überprüft schnell, dass dies tatsächlich eine Lösung ist, da

$$f(1)(m+n) = f(1)m + f(1)n.$$

□

Betrachten wir nun ein Beispiel, welches Resultate aus der Zahlentheorie verwendet.

Beispiel 12. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sodass für alle m, n in \mathbb{N}

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Beginnen wir mit den gewöhnlichen Substitutionen. Setzt man $m = n = 1$ so ergibt das $f(1)^2 = f(1)$ und demnach $f(1) = 1$ da $f(1)$ eine natürliche Zahl ist und somit nicht null sein kann.

Ferner sieht man, dass die Multiplikativität von f , also $f(mn) = f(m)f(n)$ nicht nur auf zwei Variablen beschränkt ist; mit einer einfachen Induktion auf k kann man schnell zeigen, dass f auch für beliebige natürliche Zahlen n_1, \dots, n_k multiplikativ ist, also

$$\begin{aligned} f(n_1 \cdots n_k) &= f((n_1 \cdots n_{k-1}) \cdot n_k) \\ &= f(n_1 \cdots n_{k-1}) f(n_k) \\ &= \dots \\ &= f(n_1) \cdots f(n_k). \end{aligned}$$

Im Spezialfall $n_1 = \dots = n_k$ erhält man $f(n^k) = f(n)^k$ für alle natürlichen Zahlen n und k .

Angesichts einer solchen Multiplikativität liegt es nahe, an Primfaktorzerlegungen zu denken. Ist nämlich $n > 1$ eine natürliche Zahl mit Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) \\ &= f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r}) \\ &= f(p_1)^{a_1} \cdots f(p_r)^{a_r}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man, sofern man den Werten von $f(p)$ für alle Primzahlen p kennt, den Wert von $f(n)$ für alle natürlichen n berechnen. Aber gibt es Bedingungen auf die Werte von $f(p)$? Sind sie durch die Ursprungsgleichung bestimmt? Probiert man ein bisschen herum bemerkt man, dass man keine Einschränkungen auf die Werte von $f(p)$ finden kann (genau wie für $f(1)$ im letzten Beispiel). Daher müssen sie als konstante Parameter aufgefasst werden.

Wir wollen also zeigen dass jede Funktion, welche 1 auf $f(1) = 1$ und $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ auf $f(n) = f(p_1)^{a_1} \cdots f(p_r)^{a_r}$ abbildet für eine beliebige Wahl der Werte von $f(p_i)$, eine Lösung der Ursprungsgleichung ist. Wenn $m = 1$ oder $n = 1$, dann erfüllt f die Gleichung $f(mn) = f(m)f(n)$. Im allgemeinen Fall wenn $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ und $m = q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}$ wobei $p_1 = q_1, \dots, p_k = q_k$ die gemeinsamen Primfaktoren von m und n sind (demnach also $0 \leq k \leq \min\{r, s\}$) und $p_{k+1}, \dots, p_r, q_{k+1}, \dots, q_s$ die Primfaktoren, welche nicht beide der

Zahlen m und n gleichzeitig teilen, dann sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
 f(mn) &= f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}) \\
 &= f\left(p_1^{a_1+b_1} \cdots p_k^{a_k+b_k} p_{k+1}^{a_{k+1}} \cdots p_r^{a_r} q_{k+1}^{b_{k+1}} \cdots q_s^{b_s}\right) \\
 &= f(p_1)^{a_1+b_1} \cdots f(p_k)^{a_k+b_k} f(p_{k+1})^{a_{k+1}} \cdots f(p_r)^{a_r} f(q_{k+1})^{b_{k+1}} \cdots f(q_s)^{b_s} \\
 &= f(p_1)^{a_1} \cdots f(p_r)^{a_r} f(q_1)^{b_1} \cdots f(q_s)^{b_s} \\
 &= f(n)f(m).
 \end{aligned}$$

□

Bevor wir dieses Kapitel abschliessen, betrachten wir nun noch ein Beispiel mit einer Funktion, deren Definitionsmenge die rationalen Zahlen sind. Die Art und Weise wie wir hier eine Erweiterung von \mathbb{Z} auf \mathbb{Q} durchführen, wird häufig verwendet; ich empfehle euch also, sie euch zu merken.

Beispiel 13. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sodass für alle x, y in \mathbb{Q}

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wir wissen bereits vom ersten Beispiel dieses Kapitels, dass $f(n) = f(1)n$ für alle n in \mathbb{Z} . Des Weiteren wissen wir ja auch $f(x) = -f(-x)$ und daher genügt es, f auf den positiven Zahlen zu bestimmen, da wir dann mit dieser Formel auch die Werte unter f von negativen Zahlen kennen.

Als erstes bemerken wir, dass für eine positive ganze Zahl k und eine rationale Zahl x die Gleichung

$$\begin{aligned}
 f(kx) &= f(\underbrace{x + \dots + x}_{k \text{ Mal}}) \\
 &= f(x) + \dots + f(x) \\
 &= kf(x),
 \end{aligned}$$

gilt, wobei wir die Additivität von f mit einem ähnlichen Argument wie im vorherigen Beispiel auf mehr als zwei Variablen erweitert haben,

Somit gilt für eine positive rationale Zahl $x > 0$, welche man als $x = a/b$ mit a und b in \mathbb{N} schreibt, dass

$$f(x) = f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = af\left(\frac{1}{b}\right).$$

Andererseits können wir das Bild des Kehrwerts einer natürlichen Zahl wie folgt bestimmen :

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}}_{b \text{ Mal}}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{b}\right) = bf\left(\frac{1}{b}\right),$$

und demnach

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = f(1)\frac{1}{b}.$$

Schliesslich erhalten wir

$$f(x) = f(1)\frac{a}{b} = f(1)x$$

womit wir $f(x) = f(1)x$ für alle x in \mathbb{Q} gezeigt haben, da wir für eine negative rationale Zahl $y < 0$ sehen, dass $f(y) = -f(-y) = f(1)y$ (das gleiche Argument wie in ??).

Wir sehen wie im Anfangsbeispiel, dass $x \mapsto f(1)x$ die Ursprungsgleichung tatsächlich erfüllt. \square

2.3 Doppeltes und mehrfaches Berechnen

Die Induktion bleibt die Schlüsselmethode für Funktionalgleichungen über \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} , aber dennoch existieren Fälle, in denen man die Gleichungen nicht wesentlich vereinfachen kann. Man dreht sich dann im Kreis, schmeisst mit grossen, komplizierten Funktionsausdrücken um sich, nützliche Identitäten findet man aber keine. Hier hilft folgende Idee: man berechnet einen festen Ausdruck auf zwei verschiedene Arten, ganz so wie wir überraschender Weise $f(xf(x))$ im Beispiel ?? auf zwei Arten berechnet haben. Indem man die Resultate gleichsetzt, erhält man oft neue, nützlichere Gleichungen.

Allgemeiner kann man manchmal ein Gleichungssystem konstruieren, deren Unbekannte Funktionsterme sind, die man berechnen will. Die Kunst ist es, diese Terme auf verschiedene Arten und Weisen auftauchen zu lassen, um nach der Lösung des Gleichungssystems nicht auf triviale Resultate zurückzufallen (was oft sehr frustrierend sein kann; es gehört zum Everyday Struggle des Funktionalgleichungslösers).

Betrachten wir sogleich ein erstes Beispiel.

Beispiel 14. *Finde alle $f: (-1; +\infty) \rightarrow (-1; +\infty)$ sodass für alle $x, y > 0$*

$$f(xf(x-1) + yf(y-1)) = xf(3x-1).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Setzt man naheliegenderweise $x = 1$ erhält man

$$f(f(0) + yf(y-1)) = f(2),$$

für alle $y > 0$. Gleichzeitig erhält man mit $y = 1$

$$f(xf(x-1) + f(0)) = xf(3x-1),$$

für alle $x > 0$. Vergleicht man nun beide Ausdrücke, so stellt man fest, dass wenn man im obigen Term y durch x ersetzt, die linken Seiten beider Gleichungen übereinstimmen. Wir haben $f(f(0) + yf(y-1))$ doppelt berechnet! Man erhält demnach

$$xf(3x-1) = f(2),$$

für alle $x > 0$. Für $t > -1$ setzen wir $x = \frac{t+1}{3}$ und erhalten damit

$$f(t) = \frac{3f(2)}{t+1}.$$

Die Lösungen der Ursprungsgleichung sind also von der Form $x \mapsto \frac{c}{x+1}$ wobei c eine Konstante ist.

Überprüfen wir nun, ob es für solche Lösungen weitere Einschränkungen auf c gibt. Mit einer Funktion dieser Form erhält man in der Ausgangsgleichung

$$\frac{c}{2c+1} = \frac{c}{3}$$

woraus man schliessen kann, dass entweder $c = 0$ oder $c = 1$. Es gibt demnach genau zwei Lösungen der Ursprungsgleichung; die Nullfunktion und die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Hier ist es für einmal nicht nötig zu überprüfen ob die gefundenen Funktionen die ursprüngliche Gleichung tatsächlich erfüllen, da wir sie ja genau gefunden haben, indem wir die Werte für c identifiziert haben, für welche wir tatsächlich Lösungen erhalten. Schaden kann es aber nie, vor allem wenn ihr euch nicht sicher seid; statt zu überlegen, ob ihr nun noch überprüfen müsst, dass die gefundenen Funktionen die ursprüngliche Gleichung lösen, schreibt es lieber gleich auf (besser einmal zu viel als zu wenig). Letzteres ist sicherer und geht wahrscheinlich sogar schneller. \square

In der folgenden Funktionalgleichung gibt es nur eine freie Variable. Solche Funktionalgleichungen sind grundsätzlich eher schwierig, da es wenig vernünftig scheinende Substitutionen gibt und man weniger Freiheitsgrade hat.

Beispiel 15. *Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:*

- (a) $f(-x) = -f(x)$ für alle x in \mathbb{R} ,
- (b) $f(x+1) = f(x) + 1$ für alle x in \mathbb{R} ,
- (c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ für alle $x \neq 0$ in \mathbb{R} .

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Aus (a) folgt mit $x = 0$ sofort $f(0) = 0$. Mit der Gleichung (b) erhalten wir sogleich die Induktionsrelation $f(n+1) = f(n) + 1$, welche zusammen mit $f(0) = 0$ zu $f(n) = n$ für alle n in \mathbb{Z} führt.

Nun brauchen wir eine Idee um weiterzukommen, weil wir mit elementaren Substitutionen nicht mehr viel herausfinden können. Die Idee ist, mit den Gleichungen (b) und (c) einen Funktionsterm auf zwei verschiedene Arten auszurechnen. Wir suchen also eine Grösse, die wir sowohl in der Form $a+1$ wie auch in der Form $1/b$ schreiben können. Natürlich gibt es dafür unzählige Möglichkeiten, aber die Terme, welche in den verschiedenen Grundbedingungen auftauchen, legen es Nahe den Term $\frac{1}{x} + 1$ für $x \neq 0, -1$ zu betrachten.

Einerseits folgt mit (b) und danach (c) :

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2}. \quad (4)$$

Andererseits erhält man mit (c) auch

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)(x+1)^2}{x^2}.$$

Erneut dürft ihr beim Term $f\left(\frac{x}{x+1}\right)$ nicht einfach aufgeben und müsst hartnäckig sein! Um seinen Wert zu berechnen, müssen wir ihn in eine Form bringen, welche es uns erlaubt, (b) oder (c) anzuwenden. Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{x+1}\right) &= f\left(-\frac{1}{x+1} + 1\right) \\ &= 1 + f\left(-\frac{1}{x+1}\right) \\ &= 1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= 1 - \frac{f(x)+1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir also

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{x^2}. \quad (5)$$

Ein Vergleich zwischen (4) und (5) liefert sofort

$$f(x) = x,$$

für alle $x \neq 0, -1$. Da wir aus unseren anfänglichen Substitutionen bereits wissen, dass $f(0) = 0$ und $f(-1) = -1$, schliessen wir also, dass $f(x) = x$ für alle x in \mathbb{R} .

Überprüfen wir zum Schluss noch, ob $x \mapsto x$ wirklich eine Lösung ist. Wir sehen, dass

(a) $-x = -x$,

(b) $x + 1 = x + 1$,

(c) $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$. □

Betrachten wir nun ein Beispiel, in dem zur Berechnung einiger Basiswerte ein Gleichungssystem aufgestellt werden muss.

Beispiel 16. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sodass für alle m, n in \mathbb{Z}

$$f(m+n) + f(mn) = f(m)f(n) + 1.$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Kontrolliert man die üblichen Lösungskandidaten, so stösst man auf die Lösungsfunktionen $n \mapsto 1$ und $n \mapsto n+1$. Es gibt nichtsdestotrotz noch eine etwas weniger normale Lösung, die man zu Beginn zu übersehen riskiert.

Wir versuchen nun eine Induktionsbeziehung herzuleiten, dazu setzen wir wie öfters am Anfang $n = 1$, was

$$f(m+1) = (f(1) - 1)f(m) + 1, \tag{6}$$

für alle m in \mathbb{Z} ergibt.

Damit haben wir unsere Induktionsvorschrift. Ausgestattet mit ebendieser reicht es, den Wert von $f(1)$ zu berechnen, da sich alle weiteren daraus ergeben werden. Nun gibt aber keine Substitution direkt den Wert von $f(1)$; in einer einzelnen Gleichung werden zumeist mehrere Werte der Form $f(n)$ auftauchen. Es muss also durch möglichst wenige, aber raffinierte Substitutionen ein möglichst einfaches Gleichungssystem gefunden werden.

Zuallererst betrachten wir die Standardsubstitution $m = n = 0$, diese ergibt $(f(0) - 1)^2 = 0$ und somit $f(0) = 1$. Darüber hinaus gilt

$$\begin{array}{ll} m = 1 \text{ und } n = -1 : & f(-1)(f(1) - 1) = 0. \\ m = -2 \text{ und } n = 1 : & f(-1) + f(-2) = f(-2)f(1) + 1. \\ m = n = -1 : & f(-2) + f(1) = f(-1)^2 + 1. \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung schliesst man, dass entweder $f(1) = 1$ oder $f(-1) = 0$. Wenn $f(-1) = 0$, dann erhält man durch Eliminieren von $f(-2)$ aus den letzten beiden Gleichungen, dass $(f(1) - 1)^2 = 1$ und somit $f(1) = 0$ oder $f(1) = 2$. Wir unterscheiden also drei Fälle bezüglich des Wertes von $f(1)$.

1. $f(1) = 2$. In der Gleichung (??) ergibt sich also $f(m+1) = f(m)+1$, was zusammen mit $f(1) = 2$ und einer einfachen Induktion zu $f(n) = n+1$ für alle n in \mathbb{Z} führt. Hierbei handelt es sich tatsächlich um eine Lösung, da

$$(m+n+1) + (mn+1) = (m+1)(n+1) + 1.$$

2. $f(1) = 1$. Die Gleichung (??) ergibt $f(m+1) = 1$ was direkt zu $f(n) = 1$ für alle n führt. Natürlich ist das auch wirklich eine Lösung, da $1+1 = 1+1$.
3. $f(1) = 0$. Die Gleichung (??) ergibt nun Folgendes: $f(m+1) = 1 - f(m)$. Aus $f(1) = 0$ erhält man in dieser Reihenfolge $f(2) = 1$, $f(3) = 0$, $f(4) = 1$, etc. Es scheint also, dass f ungerade Zahlen auf 0 und gerade Zahlen auf 1 schickt. Man zeigt das leicht mit Induktion.

Überprüfen wir, ob dies tatsächlich eine Lösung der Ursprungsgleichung ist; dazu unterscheiden wir die verschiedenen Fälle bezüglich der Paritäten von m und n . Sind m und n gerade, so hat man $1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1$. Sind m und n ungerade, dann ergibt das $1 + 0 = 0 \cdot 0 + 1$. Ist letztlich eine der Zahlen gerade und die andere ungerade, so führt dies zu $0 + 1 = 0 \cdot 1 + 1$. In allen Fällen gilt also Gleichheit und somit handelt es sich tatsächlich um eine Lösung.

Diese Gleichung hat also genau drei verschiedene Lösungen. □

Eine weitere, nützliche Form des doppelten Berechnens ist die folgende: Weist eine Seite einer Funktionalgleichung eine bestimmte **Invarianz** auf, so muss die andere Seite diese Invarianz auch erfüllen. Bemerkt man beispielsweise, dass sich die linke Seite einer Funktionalgleichung nicht verändert wenn man x und y vertauscht, oder wenn man x durch $-x$ (oder gar $f(x)$) ersetzt, dann muss das auch für die rechte Seite gelten. Gleichsetzen der 'alten' und 'neuen' rechten Seite ergibt dann eine neue Gleichung.

Betrachten wir erneut das Beispiel ?? :

$$f(xf(x-1) + yf(y-1)) = xf(3x-1).$$

Man stellt nun fest, dass die rechte Seite invariant unter der Vertauschung von x und y ist, somit muss auch die rechte Seite diese Eigenschaft haben. Dies führt zur Gleichung

$$xf(3x-1) = yf(3y-1),$$

für alle $x, y > 0$. Setzt man nun $y = 1$, so folgt direkt $xf(3x-1) = f(2)$ und von da aus fährt man fort wie in der oben bereits gezeigten Lösung.

Die folgende Funktionalgleichung ist ein Beispiel für ein Problem, welches sehr schwierig ist, wenn man diesen Trick nicht kennt.

Beispiel 17. (CSO 2001) *Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}*

$$f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 \cdot f(x + y).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Die linke Seite ist invariant unter dem Ersetzen von x mit $-x$ und somit auch die rechte Seite. Dies liefert die Gleichung

$$(x - y)^2 \cdot f(x + y) = (x + y)^2 \cdot f(y - x).$$

Nun wollen wir für x und y so substituieren, dass $x + y$ alle reellen Werte annehmen kann, während $y - x$ konstant bleibt, zum Beispiel gleich 1. Dies erreichen wir, indem wir $x = \frac{1}{2}(t - 1)$ und $y = \frac{1}{2}(t + 1)$ setzen, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist. Die Gleichung wird zu $f(t) = t^2 \cdot f(1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Alle Lösungen sind also von der Form $f(x) = cx^2$ mit einer reellen Konstanten c .

Nun setzen wir das in die Ursprungsgleichung ein um mögliche Einschränkungen auf c zu identifizieren. Die Gleichung wird zu

$$c(x^2 + cy^2)^2 = c(x^2 - y^2)^2.$$

für alle x, y in \mathbb{R} . Mit $x = y = 1$ erhält man $c(c + 1)^2 = 0$ und somit $c = 0$ oder $c = -1$. Des Weiteren stellt man fest, dass wenn $c = 0$ oder $c = -1$ obige Gleichung für alle x, y in \mathbb{R} gilt. Die Lösungen dieser Funktionalgleichung sind also die Nullfunktion und $x \mapsto -x^2$. \square

2.4 Egalisierung von Funktionaltermen

Scheint eine Funktionalgleichung besonders hartnäckig zu sein, so ist es manchmal ratsam, gezielt nach ausgefeilten Substitutionen zu suchen, für welche zwei Funktionalterme übereinstimmen. Wenn man durch eine raffinierte Substitution zwei additive oder multiplikative Terme der Gleichung egalisieren kann, so kann dies das Problem durchaus entscheidend vereinfachen. Betrachten wir umgehend ein Beispiel, um das zu veranschaulichen.

Beispiel 18. (Schweiz 1998) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Die normale Vorgehensweise wäre hier durch Substitutionen die zwei grossen Funktionalterme loszuwerden, nämlich mit $y = x^2$ und $y = -f(x)$. Es gibt aber eine direktere Methode, und diese betrachten wir hier.

Kann man irgendetwas einsetzen, sodass sich zwei Terme gegenseitig aufheben? In diesem Beispiel könnte man versuchen, y so zu wählen, dass die Terme $f(f(x) + y)$ und $f(x^2 - y)$ gleich werden. Dazu muss dann $f(x) + y = x^2 - y$ gelten, also $y = (x^2 - f(x))/2$. Einsetzen liefert nun die Gleichung

$$4f(x) \cdot \frac{x^2 - f(x)}{2} = 0$$

für alle x in \mathbb{R} .

Daraus folgt direkt, dass für ein gegebenes x in \mathbb{R} entweder $f(x) = 0$ oder $f(x) = x^2$ gilt (insbesondere also $f(0) = 0$). Aber Achtung, wie schon mal bedeutet das nicht, dass entweder $f(x) = 0$ für alle x , oder $f(x) = x^2$ für alle x , sondern dass jeder Mix dieser beiden Funktionen eine potentielle Lösung ist! Wir beenden den Beweis auf die gleiche Art und Weise wie im Beispiel ??.

Hierzu nehmen wir an, dass es zwei reelle Zahlen $x_1, x_2 \neq 0$ gibt, sodass $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = x_2^2$. Setzen wir $x = x_1$ und $y = x_2$ in der Ursprungsgleichung, so ergibt das

$$f(x_1^2 - x_2) = x_2^2.$$

Andererseits gilt nun wieder entweder $f(x_1^2 - x_2) = 0$ oder $f(x_1^2 - x_2) = (x_1^2 - x_2)^2$. Zusammen mit obiger Gleichung ergibt sich im ersten Fall $x_2 = 0$ und somit ein Widerspruch, und im zweiten Fall $x_1^2(x_1^2 - 2x_2) = 0$. Da $x_1 \neq 0$ erhalten wir $x_1^2 = 2x_2$. Setzt man nun $x = 0$ und $y = x_2$ so liefert das $f(-x_2) = f(x_2) = x_2^2$. Somit können wir obiges Argument mit $x = x_1$ und $y = -x_2$ wiederholen, was analog zu $x_1^2 = -2x_2$ führt. Somit gilt aber $x_1 = x_2 = 0$, was erneut ein Widerspruch ist. Wir schliessen also, dass es zwei potentielle Lösungen gibt; die Nullfunktion und $x \mapsto x^2$. Die erste erfüllt trivialerweise die Ursprungsgleichung, da $0 = 0 + 0$. Für die zweite genügt es zu sehen, dass

$$(x^2 + y)^2 = (x^2 - y)^2 + 4x^2y.$$

□

Na gut, weil's so Spass macht hier noch ein kleines Beispiel, als Geschenk.

Beispiel 19. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}^+ ,

$$f(x^2 f(f(y)))x = f(x)f(y).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Dieses Problem stellt sich nach einigen Versuchen als beinahe unangreifbar durch Standardsubstitutionen heraus. Wir arbeiten hier mit reinen Produkten von Funktionaltermen, somit ist es sinnvoll zu probieren, einzelne Terme zu egalisieren um so durch kürzen die Gleichung zu vereinfachen.

Zuallererst sehen wir, dass wir mit $x = \frac{1}{f(f(y))}$ zu $f(x^2 f(f(y))) = f(x)$ kommen, was nach Vereinfachen

$$f(y)f(f(y)) = 1 \tag{7}$$

ergibt. Man beachte dass die Substitution und das Kürzen erlaubt sind, da die Zielmenge von f die Null nicht enthält.

In ähnlicher Manier führt $x = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$ zu $f(x^2 f(f(y))) = f(y)$ und somit ergibt sich nach Vereinfachen

$$f\left(\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}\right) = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}. \tag{8}$$

Eine solche Gleichung haut euch wahrscheinlich vom Stuhl, so kompliziert scheint sie. Der emsige Schüler, der sich zu Beginn die Zeit genommen hat, nach möglichen Lösungen der Ursprungsgleichung zu suchen hat sich wahrscheinlich davon überzeugt, dass die Funktion $x \mapsto 1/x$ die einzige Lösung zu sein scheint. Somit ist wohl $z = 1$ die einzige Zahl, welche $f(z) = z$ erfüllt, wahrscheinlich können wir also aus der letzten Gleichung etwas Entscheidendes herleiten.

Betrachten wir erneut die Gleichung (??); wir wenden sie auf die Zahlen z an, für welche $f(z) = z$ gilt. Dies ergibt $zf(z) = 1$ und durch erneutes Anwenden von $f(z) = z$ führt dies zu $z^2 = 1$. Somit gilt $z = 1$. Wir haben also gezeigt, dass wenn eine Zahl z die

Gleichung $f(z) = z$ erfüllt, wobei f eine Lösung der Ursprungsgleichung ist, $z = 1$ gelten muss.

Kombiniert man dies mit der Gleichung (??), so erhält man $\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}} = 1$ und somit $f(f(y)) = y$ für alle y in \mathbb{R}^+ . Schliesslich erhält man, wenn man diese letzte Gleichung auf (??) anwendet, dass $f(y) = 1/y$.

Überprüfen wir, ob es sich tatsächlich um eine Lösung handelt. Es gilt

$$\frac{1}{x^2 \frac{1}{y}} \cdot x = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}.$$

□

Dieses Beispiel zeigt, dass man sich nicht vor garstig scheinenden Substitutionen zu fürchten braucht. Nachdem man die Standardsubstitutionen durchprobiert hat, ist es immer ratsam, zwei Funktionalterme zu egalisieren. Das ist auf jeden Fall ein guter Reflex beim Lösen von Funktionalgleichungen.

Das Beispiel zeigt euch gleichermassen, dass man keine voreiligen Schlüsse ziehen darf. Ein unerfahrener Leser hätte vielleicht in Anbetracht der Gleichung (??) die naive Substitution $z = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$ durchgeführt, womit er zu $f(z) = z$ gelangt. Natürlich gilt diese Gleichung aber nur, wenn sich z als $z = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$ für eine positive reelle Zahl y schreiben lässt. Sie impliziert also keineswegs, dass f die Identität ist.

Das folgende Kapitel behandelt weitere, fortgeschrittenere Methoden die sich auf grundlegende Eigenschaften von Funktionen stützen.

3 Weitere Verfahren

3.1 Surjektivität

Wir haben bereits gesehen, dass zwar jede Zahl der Definitionsmenge einer Funktion genau ein Bild in der Zielmenge haben, keineswegs aber jede Zahl der Zielmenge das Bild eines Elements der Definitionsmenge sein muss.

Wir sagen daher, dass eine Funktion $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *surjektiv* ist, wenn dies gleichwohl der Fall ist, also wenn für alle Elemente b im \mathcal{B} (mindestens) ein a in \mathcal{A} existiert, sodass $f(a) = b$. Hiermit setzen wir voraus, dass aller Element der Zielmenge das Bild eines Elements der Definitionsmenge sein muss.

Betrachten wir sogleich ein Beispiel; die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 1, \end{aligned}$$

ist nicht surjektiv, da für $0 \in \mathbb{R}$ kein x in \mathbb{R} mit $x^2 + 1 = 0$ existiert. Andererseits ist die Funktion (und es handelt sich hierbei tatsächlich um eine andere Funktion !)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [1; +\infty) \\ x \mapsto x^2 + 1,$$

surjektiv, da für $t \geq 1$ die Gleichung $t = f(\sqrt{t-1})$ gilt.

Zwei natürliche Fragen tauchen hier auf. Zuerst: Was nützt eine surjektive Funktion beim Lösen einer Funktionalgleichung? Und danach: Wie zeigt man konkret, dass eine Lösungsfunktion surjektiv sein muss?

Die häufigste Anwendung der Surjektivität besteht darin, dass sie die Existenz eines Urbildes für grundlegende Werte wie 0 oder 1 sichert. Dies hilft manchmal massgeblich, Gleichungen wie $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$ herzuleiten, und diese sind, wie ihr bereits gesehen habt, oft äusserst nützlich.

Allgemeiner garantiert uns die Surjektivität die Existenz eines Urbildes für alle Elemente der Zielmenge. Man kann also, im allgemeinsten Fall, für einen freien Parameter das Urbild eines Ausdrucks, der von einem zweiten Parameter abhängt, einsetzen.

Es existiert noch eine dritte Situation in der die Surjektivität nützlich ist. Taucht eine freie Variable, sagen wir x , in der Gleichung ausschliesslich als $f(x)$ auf und wissen wir bereits, dass f surjektiv ist, dann können wir $f(x)$ selbst als eine freie Variable betrachten und somit durch eine neue Variable ersetzen, sofern die Zielmenge von f mit der Definitionsmenge übereinstimmt. Betrachten wir ein kleines Beispiel um dies zu veranschaulichen :

Beispiel 20. Finde alle surjektiven Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x in \mathbb{R} ,

$$f(f(x)) = f(x).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wir wissen aus der Aufgabenstellung, dass f surjektiv ist. Anders gesagt bedeutet das, dass wenn x die reellen Zahlen vollständig durchläuft, dann durchläuft auch $f(x)$ nach und nach alle reellen Zahlen. Somit können wir alle Terme $f(x)$ in der Gleichung durch eine neue reelle Variable t ersetzen, womit wir schliesslich $f(t) = t$ für alle t in \mathbb{R} erhalten.

Aufgepasst ! Alle $f(x)$ einer Gleichung durch eine neue Variable zu ersetzen ist immer erlaubt, auch wenn f nicht surjektiv ist (es ist nichts weiter Umschreiben der Gleichung !). Die Surjektivität kommt erst bei der Aussage, dass die Gleichung $f(t) = t$ für alle t in \mathbb{R} gilt, ins Spiel. Im Allgemeinen hat man $f(t) = t$ lediglich für reelle Zahlen t , welche sich als $t = f(x_0)$ für ein x_0 in \mathbb{R} schreiben lassen.

Um aber auf das Beispiel zurückzukommen; wir sehen dass die Funktion $x \mapsto x$ tatsächlich eine Lösung ist, da sie eine surjektive Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ist, und natürlich gilt auch $x = x$. □

Bevor wir zum ersten wirklichen Beispiel kommen, findet ihr hier eine kurze Beschreibung der Standardprozedur zum Zeigen, dass eine Lösungsfunktion einer Funktionalgleichung surjektiv ist. In den meisten Fällen versucht man, die Funktionalgleichung durch geeignete Umformungen in die Form $f(\dots) = A(x, y, \dots)$ zu bringen, sodass auf der einen Seite ein Funktionalterm steht und auf der anderen ein Ausdruck A , welcher alle Werte der Zielmenge von f annehmen kann. Dies muss dann auch für f gelten, ganz egal wie kompliziert der Ausdruck $f(\dots)$ tatsächlich ist.

Nehmen wir zum Beispiel an, dass wir uns für folgende Funktionalgleichung interessieren

$$f(f(x) - x + y)^2 = x + f(y^2 - x)$$

für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hier kann man zeigen, dass f surjektiv ist. In der Gleichung gibt es zwei Funktionalterme, auf beiden Seiten einer und von denen einer quadriert ist. Wir versuchen also, den quadrierten Funktionalterm "festzuhalten", um über den anderen uneingeschränkte Kontrolle zu haben. Mit diesem Ziel im Auge setzen wir $y = x - f(x)$, was die Gleichung

$$f((x - f(x))^2 - x) = f(0)^2 - x.$$

liefert. Es hat hier auf der rechten Seite eine lineare Funktion in x und lineare Funktionen sind, sofern sie nicht konstant sind, surjektiv von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , da für alle t in \mathbb{R} , $t = f(0)^2 - (f(0)^2 - t)$. Da also die rechte Seite aller reellen Zahlen annehmen kann, muss das auch für die linke Seite gelten. Hierbei handelt es sich um einen reinen Funktionalterm (also kein Exponent, Koeffizient oder andere Schnörkel), daher ist f surjektiv. Das detaillierte mathematische Argument lautet hier: für ein beliebiges t in \mathbb{R} gilt

$$t = f\left(\left((f(0)^2 - t) - f(f(0)^2 - t)\right)^2 - (f(0)^2 - t)\right).$$

Ihr werdet verstehen, dass man in der Praxis die einfache Erklärung in Worten dem mathematischen Detail vorzieht.

Betrachten wir nun das erste konkrete Beispiel.

Beispiel 21. *Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R} ,*

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x.$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Mit dem Ziel die Surjektivität von f nachzuweisen, setzen wir $y = 0$ um zwei der drei Funktionalterme festzuhalten. Man erhält somit

$$f(f(f(x))) = x + f(0) - f(f(0)).$$

Die rechte Seite ist eine lineare Funktion die somit alle reellen Zahlen durchläuft. Die rechte Seite ist ein reiner Funktionalterm. Man schliesst daraus, dass f surjektiv ist.

Man bemerkt nun, dass die Variable y stets als $f(y)$ in der Gleichung auftritt. Setzen wir also $t = f(y)$; dies ergibt

$$f(t) = t + x - f(f(f(x))).$$

Diese Gleichung gilt für alle x in \mathbb{R} und gleichermassen für alle t in \mathbb{R} , da f surjektiv ist. Mit $x = 0$ erhält man so $f(t) = t + c$ für allen reellen Zahlen t , wobei c eine Konstante ist. Setzt man dies mit $x = y = 0$ in die Ursprungsgleichung ein, so folgt $3c + 2c = c$ und demnach $c = 0$, also ist f die Identität.

Man überprüft leicht, dass die Identität tatsächlich eine Lösung ist, da $x + y = y + x$. \square

Das folgende Beispiel ist eine prachtvolle Gleichung von der IMO 1992. Wir werden hier das Konzept der Surjektivität verwenden um ein paar erste Resultate zu erzielen; wir werden die Lösung später zu Ende führen.

Beispiel 22. (IMO 92) Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Anfang der Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wir wollen die Surjektivität von f nachweisen, daher halten wir die unreinen Funktionalterme fest. Wir setzen also $x = 0$ was

$$f(f(y)) = y + f(0)^2 \tag{9}$$

ergibt. Die rechte Seite ist eine lineare Funktion in y und kann somit alle reellen Zahlen annehmen; die linke Seite ist ein reiner Funktionalterm. Somit ist f surjektiv und daher existiert eine reelle Zahl a mit $f(a) = 0$.

Um von der Gleichung (??) zu profitieren, wenden wir f auf beide Seiten der Ursprungsgleichung an. Daraus folgt

$$x^2 + f(y) + f(0)^2 = f(f(x^2 + f(y))) = f(y + f(x)^2).$$

Setzen wir hier $x = y = a$ dann gilt

$$a^2 + f(0)^2 = 0$$

und somit wie erwartet $a = f(0) = 0$.

Setzt man nun $y = 0$ in der Ursprungsgleichung ergibt das

$$f(x^2) = f(x)^2 \tag{10}$$

für alle x in \mathbb{R} .

Darüber hinaus wird die Gleichung (??) zu $f(f(y)) = y$ für alle y in \mathbb{R} . Benutzt man diese Identität zusammen mit der Gleichung (??), so kann man die Ursprungsgleichung als

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(y)) + f(x)^2$$

schreiben. Hier setzen wir $t = f(y)$ und erhalten damit

$$f(x^2 + t) = f(t) + f(x)^2 \tag{11}$$

was durch die Surjektivität von f für alle x, t in \mathbb{R} gilt. Wir werden später sehen, wie man den Beweis zu Ende führen kann. \square

Dies beschliesst das Kapitel über die Surjektivität; eines Schlüsselbegriffs für Funktionalgleichungen. Beginnt man damit, die potentiellen Lösungen einer Gleichung zu bestimmen und stellt dann fest, dass sie allesamt surjektiv zu sein scheinen, dann empfiehlt es sich auf jeden Fall zu zeigen, dass eine Lösungsfunktion surjektiv sein muss.

Allgemeiner ist es immer ratsam, auch wenn f nicht surjektiv ist, die Werte zu bestimmen, welche f oder andere Ausdrücke in f annehmen können. Behaltet diesen Tipp fürs erste im Hinterkopf; sobald ihr eine gewisse Erfahrung habt, wird er seinen vollen Sinn offenbaren.

Betrachten wir nun den Zwillingsbegriff: die Injektivität.

3.2 Injektivität

Wir erinnern uns daran, dass alle Elemente der Definitionsmenge einer Funktion per Definition genau ein Bild in der Zielmenge haben. Wir haben aber auch gesehen, dass es durchaus möglich ist, dass ein Element der Zielmenge auch das Bild mehrerer Elemente der Definitionsmenge sein kann. Falls eine Funktion gleichwohl die Eigenschaft hat, dass kein Element der Zielmenge das Bild mehrerer Elemente der Definitionsmenge ist, so nennen wir sie *injektiv*.

Mathematisch ausgedrückt ist eine Funktion $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *injektiv*, falls für alle a_1, a_2 in \mathcal{A}

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

Äquivalent dazu ist auch die Aussage, dass wenn $a_1 \neq a_2$ zwei verschiedene Elemente von \mathcal{A} sind, dann gilt $f(a_1) \neq f(a_2)$. Geometrisch kann man für Funktionen einer reellen Variablen die Injektivität mit der Regel der Horizontalen überprüfen: eine solche Funktion ist genau dann injektiv, wenn jede horizontale Gerade den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet.

Damit können wir auch definieren, was eine bijektive Funktion ist: Man sagt, dass eine Funktion *bijektiv* ist, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

Merkt euch gut die folgende Erinnerung. Eine Funktion $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist:

1. surjektiv, falls alle Elemente der Zielmenge \mathcal{B} **mindestens** ein Urbild in der Definitionsmenge \mathcal{A} haben.
2. injektiv, falls alle Elemente der Zielmenge \mathcal{B} **höchstens** ein Urbild in der Definitionsmenge \mathcal{A} haben.
3. bijektiv, falls alle Elemente der Zielmenge \mathcal{B} **genau** ein Urbild in der Definitionsmenge \mathcal{A} haben.

Betrachten wir beispielsweise die folgenden vier Funktionen. Die erste

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

ist eine Funktion, welche weder surjektiv, noch injektiv ist. Sie ist nicht surjektiv, da kein Element der Definitionsmenge das Bild -1 hat und sie ist nicht injektiv, da $f(1) = f(-1) = 1$.

Nimmt man

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2,$$

so erhält man eine Funktion, die zwar nicht surjektiv, wohl aber injektiv ist. Sie ist nicht surjektiv, da noch immer kein Element der Definitionsmenge das Bild -1 hat, aber sie ist injektiv, da wir für $x \neq y$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ Ungleichheit der Bilder haben, also $x^2 \neq y^2$.

Nimmt man allerdings

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x \mapsto x^2,$$

so erhält man eine surjektive Funktion, die aber nicht injektiv ist. Sie ist surjektiv, da für alle t in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Gleichung $t = (\sqrt{t})^2 = f(\sqrt{t})$ gilt. Dennoch ist sie nicht injektiv, da $f(1) = f(-1) = 1$.

Letztlich ist

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x \mapsto x^2$$

eine bijektive Funktion.

Erneut fragen wir uns, inwiefern eine injektive Funktion nützlich ist beim Lösen einer Funktionalgleichung. Die häufigste Anwendung ist das "Kürzen von fäuf beiden Seiten einer Gleichung: finden wir eine Gleichheit zweier reiner Funktionalterme und wissen wir, dass eine Lösungsfunktion stets injektiv sein muss, so müssen die Argumente übereinstimmen. Betrachten wir sogleich ein erstes Beispiel:

Beispiel 23. *Finde alle injektiven Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x in \mathbb{R}*

$$f(f(x)) = f(x).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wir sind nur an injektiven Lösungen interessiert. Wir erinnern uns, dass f genau dann injektiv ist, wenn man für u, v in \mathbb{R} mit $f(u) = f(v)$ zwangsläufig $u = v$ hat. In unserem Problem haben wir für x in \mathbb{R} die Gleichung $f(f(x)) = f(x)$ und somit, da f injektiv ist, gilt gezwungenermaßen $f(x) = x$. Und siehe da! Wir sind schon fertig.

Wir überprüfen noch, ob die Identität auch wirklich eine Lösung der Ursprungsgleichung ist. Tatsächlich ist sie injektiv von \mathbb{R} nach \mathbb{R} und natürlich gilt auch $x = x$. \square

Wie zeigt man, dass eine Funktion injektiv ist? Im Allgemeinen schafft man das, wenn man durch raffinierte Substitutionen auf eine Gleichung in einer Variablen, sagen wir x , erhalten, welche überall bis auf eine einzige Stelle als $f(x)$ auftaucht, und bei jener Stelle hoffen wir, dass sie injektiv nackt ist, also ausserhalb jedes Funktionalterms. Nimmt man dann an, dass $f(a) = f(b)$, kann man mit Hilfe dieser Gleichung auf $a = b$ schliessen.

Hier sagt ein Beispiel wohl mehr als Tausend Worte, nicht zuletzt um diese Erklärung zu verstehen. Die folgende Aufgabe ist von der Finalrunde 2012.

Beispiel 24. (Finalrunde 2012) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(2x) + 8y + 6.$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Man bemerkt, dass nur y ausserhalb von jeglichem Funktionalterm liegt. Darüber hinaus wird euch die Erfahrung zeigen, dass ihr beim Nachweisen der Injektivität einer Funktion Variablen, die gleichzeitig als $f(x)$ und als $f(2x)$ in der Gleichung auftauchen, möglichst schnell um die Ecke bringt. Setzen wir also $x = 0$; das liefert

$$f(f(0) + 2f(y)) = f(0) + 8y + 6.$$

Erneut lernt man mit der Zeit, dass man mit einer solchen Gleichung schon gewonnen hat punkto Injektivität. Tatsächlich sieht man, dass wenn $f(u) = f(v)$ für zwei reelle Zahlen u, v , dann gilt $f(f(0) + 2f(u)) = f(f(0) + 2f(v))$ und somit $f(0) + 8u + 6 = f(0) + 8v + 6$ was $u = v$ impliziert. Somit ist f injektiv.

Versuchen wir nun, auf beiden Seiten der Gleichung genau einen reinen Funktionalterm auftauchen zu lassen, sodass wir f aus der Gleichung kürzen können. Hierfür müssen wir das $8y + 6$ loswerden, darum setzen wir $y = -3/4$. Man erhält so

$$f\left(f(x) + 2f\left(\frac{-3}{4}\right)\right) = f(2x).$$

Da nun f injektiv ist, kann man das äusserste f rauskürzen, was

$$f(x) + 2f\left(\frac{-3}{4}\right) = 2x$$

ergibt. Man schliesst daraus, dass eine Lösung stets die Form $x \mapsto 2x + c$ hat. Setzt man dies in die Ursprungsgleichung zusammen mit $x = y = 0$ ein, so erhält man $7c = c + 6$ und somit $c = 1$.

Wir überprüfen nun noch, ob $x \mapsto 2x + 1$ wirklich eine Lösung ist. Tatsächlich gilt

$$2((2x + 1) + 2(2y + 1)) + 1 = 4x + 8y + 7 = 2 \cdot (2x) + 1 + 8y + 6.$$

□

Betrachten wir nun noch ein letztes Beispiel welches wir erst durch Injektivität, dann durch Surjektivität lösen werden.

Beispiel 25. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R} ,

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Erste Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Offensichtlich ist die Nullfunktion eine Lösung. Wir suchen nun noch andere Lösungen und schliesse diese ab hier aus, somit können wir annehmen, dass eine reelle Zahl a existiert, sodass $f(a) \neq 0$.

Setzt man $x = a$ so ergibt das

$$f(f(a)f(y)) = f(a)y.$$

Wir zeigen nun, dass f injektiv ist. Seien dazu u und v reelle Zahlen mit $f(u) = f(v)$. Man erhält

$$f(a)u = f(f(a)f(u)) = f(f(a)f(v)) = f(a)v,$$

und da $f(a) \neq 0$, folgt daraus $u = v$. Somit sind die nicht trivialen Lösungen der Ursprungsgleichung injektiv.

Da wir nun die Gleichheit zweier reiner Funktionalterme anstreben, setzen wir nun $y = 1$ in der Ursprungsgleichung, was $f(f(x)f(1)) = f(x)$ ergibt. Aus der Injektivität von f folgt damit $f(x)f(1) = x$. Setzt man dann noch $x = 1$ ergibt dies $f(1)^2 = 1$ und somit $f(1) = \pm 1$. Somit erhält man zwei Funktionen: $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$.

Wir überprüfen nun noch, ob beide Funktionen tatsächlich Lösungen der Ursprungsgleichung sind. Man sieht, dass sowohl $xy = xy$, als auch $-((-x)(-y)) = (-x) \cdot y$. □

Zweite Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wir nehmen erneut an, dass f nicht die Nullfunktion ist; sei daher a in \mathbb{R} so, dass $f(a) \neq 0$. Setzt man $x = a$ ergibt dies

$$f(f(a)f(y)) = f(a)y.$$

Die rechte Seite kann alle reellen Zahlen annehmen, da $f(a) \neq 0$. Da die linke Seite ein reiner Funktionalterm ist, schliessen wir, dass f surjektiv ist.

Setzen wir erneut $y = 1$ in der Ursprungsgleichung ein, liefert das $f(f(x)f(1)) = f(x)$. Mit $t = f(x)$ und der Surjektivität von f erhält man so $f(tf(1)) = t$ für alle t in \mathbb{R} .

Wir bemerken nun, dass wenn $f(1) = 0$ wäre, dann würde $f(0) = t$ für alle t in \mathbb{R} gelten, was absurd ist. Daher gilt $f(1) \neq 0$. Setzen wir nun noch $t = z/f(1)$, so erhalten wir $f(z) = z \frac{1}{f(1)}$ für alle z in \mathbb{R} . Somit haben die Lösungsfunktionen die Form $x \mapsto cx$. Setzt man dies in der Ursprungsgleichung ein zusammen mit $x = y = 1$, ergibt das $c^3 = c$ und somit $c = \pm 1$, da wir die Nullfunktion bereits ausgeschlossen haben.

Man beendet den Beweis nun gleich wie in der ersten Lösung. □

Lösung für die gerissenen Mathleten. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Die linke Seite der Gleichung ist invariant unter der Vertauschung von x und y und somit auch die rechte. Man erhält so

$$xf(y) = yf(x)$$

für alle x, y in \mathbb{R} . Setzt man $y = 1$ ergibt das sogleich $f(x) = f(1)x$. Man beendet die Lösung wie vorher. \square

Denkt also immer an Symmetrieargumente. Sie können einem das Leben massgeblich vereinfachen !

Wir haben nun die grundlegenden und wichtigsten Methoden für das Lösen von Funktionalgleichungen gesehen. Sie sind es, die man zuallererst ausprobieren sollte. Die Methoden, die wir nun noch betrachten, betreffen spezifische Typen von Funktionalgleichungen. Sie sind daher weniger allgemein, gleichwohl aber interessant. Ihr werdet auch feststellen, dass die Beispiele dieser Funktionalgleichungstypen etwas schwieriger sind.

3.3 Monotonie

Die Monotonie ist ein Konzept welches auf natürliche Art und Weise im Studium von Funktionen auftaucht. Mit Begriff Monotonie erfasst man sowohl fallende als auch steigende Funktionen. Mathematisch ausgedrückt heisst eine Funktion f mit Definitionsmenge \mathcal{A} und Zielmenge \mathcal{B} , wobei \mathcal{A} und \mathcal{B} Teilmengen von \mathbb{R} (oder allgemeiner zwei geordnete Mengen) sind,

1. *monoton steigend*, wenn für alle x, y in \mathcal{A} mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) \leq f(y)$ gilt.
2. *streng monoton steigend*, wenn für alle x, y in \mathcal{A} mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) < f(y)$ gilt.
3. *monoton fallend*, wenn für alle x, y in \mathcal{A} mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) \geq f(y)$ gilt.
4. *streng monoton fallend*, wenn für alle x, y in \mathcal{A} mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) > f(y)$ gilt.

Eine Funktion heisst *monoton*, falls sie entweder monoton fallend oder monoton steigend ist. Analog dazu heisst eine Funktion *streng monoton*, falls sie entweder streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

Die Monotonie tritt beim Lösen von Funktionalgleichungen in verschiedenen Formen auf. Wir werden später sehen, dass die Monotonie bei der Erweiterung von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} eine Schlüsselrolle spielt. Ein weiterer Nutzen der Monotonie entspringt der folgenden Aussage:

Lemma 3.1. *Eine streng monotone Funktion ist injektiv.*

Beweis. Die Idee ist ziemlich klar und dieses Resultat wird euch kaum überraschen. Sei f eine streng monotone Funktion. Ad absurdum nehmen wir an, dass wir $f(u) = f(v)$ für zwei Elemente $u \neq v$ der Definitionsmenge haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man daher $u < v$ annehmen. Nach der strengen Monotonie gilt nun entweder $f(u) < f(v)$ im steigenden Fall, oder $f(u) > f(v)$ im fallenden Fall. In beiden Fällen führt dies zum Widerspruch. \square

Wir verwenden dieses Lemma sogleich im folgenden Beispiel.

Beispiel 26. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}^+

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Unsere hart erarbeiteten, guten Reflexe sagen uns, dass wir bei einer solchen Funktionalgleichung versuchen sollten, zwei Terme zu egalisieren. Dazu halten wir x fest und suchen y sodass $yf(x) = x + y$. Dies führt zu $y = \frac{x}{f(x)-1}$ und das wollen wir auch einsetzen, aber diese Substitution ist nur erlaubt, wenn $f(x) > 1$, da $y > 0$ sein muss. Für solche x erhält man mit dieser Substitution aber nach Vereinfachen $f(x) = 1$, Widerspruch. Somit existiert kein x in \mathbb{R}^+ mit $f(x) > 1$, oder anders gesagt gilt $f(x) \leq 1$ für alle x in \mathbb{R}^+ .

Auf die Ursprungsgleichung angewendet liefert das $f(x + y) \leq f(x)$ für alle x, y in \mathbb{R}^+ , da $f(yf(x)) \leq 1$. Daraus kann man schliessen, dass f monoton fallend ist, da so für gegebene Zahlen $u < v$ die Ungleichung $f(v) = f(u + (v - u)) \leq f(u)$ gilt ($y = v - u$ ist erlaubt, da $v - u > 0$).

Wir stellen fest, dass die Funktion $x \mapsto 1$ eine Lösung der Ursprungsgleichung ist. Ohne diese Funktion auszuschliessen, können wir also unmöglich die Injektivität für Lösungsfunktionen nachweisen. Nehmen wir an, dass $f(a) = 1$ für ein $a > 0$. Da dann für $0 < x \leq a$ auch $f(x) \geq f(a) = 1$ gilt, schliessen wir mit $f(x) \leq 1$ dass $f(x) = 1$ für alle $0 < x \leq a$. In der Ursprungsgleichung ergibt dies, dass für Zahlen $0 < x, y \leq a$ die linke Seite 1 ist. Nehmen wir nun $x, y \leq a$ so, dass $x + y$ grösser als a ist, also beispielsweise mit $x = y = 2a/3$, dann erhalten wir mit $f(4a/3) = 1$ ein entscheidendes Resultat. Wir bemerken nämlich, dass $4a/3 > a$; wiederholen wir also das obige Argument mit $4a/3$ statt a , dann erhalten wir, dass f überall gleich 1 ist (genauer gesagt funktioniert dieses Argument, da $(4/3)^n a$ für immer grössere natürliche Zahlen n gegen $+\infty$ strebt).

Wir können daher annehmen, dass $f(x) \neq 1$ für alle x in \mathbb{R}^+ , daher gilt sogar $f(x) < 1$ für alle solchen x . Wiederholen wir nun das Argument, mit dem wir die fallende Monotonie von f gezeigt haben, aber diesmal mit der strikten Ungleichung $f(yf(x)) < 1$, dann erhalten wir, dass f sogar streng monoton fallend ist. Somit ist f insbesondere injektiv.

Nun wollen wir von der Injektivität profitieren. Dazu muss einer der beiden Terme auf der linken Seite der Ursprungsgleichung verschwinden. Hier wird's tricky. Die Idee ist, die Ursprungsgleichung als eine Formel zu nutzen, mit welcher wir das Bild der Summe zweier Zahlen unter f berechnen können. Wir versuchen so, das $f(yf(x))$ auch auf der

rechten Seite auftauchen zu lassen. Wir haben

$$\begin{aligned} f(x)f(yf(x)) &= f(x+y) \\ &= f(yf(x) + (x+y-yf(x))) \\ &= f(yf(x))f((x+y-yf(x))f(yf(x))) \end{aligned}$$

und daher erhalten wir

$$f(x) = f((x+y-yf(x))f(yf(x))).$$

Nun benutzen wir die Injektivität von f , diese ergibt $x = (x+y-yf(x))f(yf(x))$ für alle x, y in \mathbb{R}^+ . Damit sind wir fast fertig; setzen wir $x = 1$ liefert das

$$f(yf(1)) = \frac{1}{1 + (1 - f(1))y}.$$

Nun müssen wir nur noch $z = yf(1)$ setzen; durchläuft y die Zahlen aus \mathbb{R}^+ so nimmt auch z alle Werte aus \mathbb{R}^+ einmal an. Dies ergibt $f(z) = \frac{1}{1+cz}$ mit der positiven Konstanten $c = \frac{1-f(1)}{f(1)}$.

Überprüfen wir nun, ob die Funktionen der Form $x \mapsto \frac{1}{1+cx}$ mit $c \geq 0$ auch wirklich Lösungen sind; mit $c = 0$ erhalten wir die Einsfunktion, die wir zuvor ausgeschlossen haben. Tatsächlich gilt

$$\frac{1}{1+cx} \cdot \frac{1}{1+cy \cdot \frac{1}{1+cx}} = \frac{1}{1+cx+cy} = \frac{1}{1+c(x+y)}.$$

□

Ein solides Beispiel einer Funktionalgleichung in der man von der Monotonie profitiert. Keine Panik, es handelt sich um eine sehr schwierige Aufgabe. Behaltet erstmal nur das Schema im Kopf, mit welchem wir die Monotonie gezeigt haben und auch, dass man Injektivität mit Hilfe von strenger Monotonie zeigen kann.

3.4 Fixpunkte und Nullstellen einer Funktion

Zum Einstieg die genaue Definition dieser Begriffe.

Sei $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ eine beliebige Funktion. Ein Element a in A heisst *Fixpunkt* von f , falls $f(a) = a$. Man bemerke, dass wir hier die Gleichheit von Definitions- und Zielmenge vorausgesetzt haben, sodass a auch wirklich ein Element der Zielmenge ist; andernfalls wäre die Definition sinnlos.

Die Nullstellen betreffend; ist $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, dann ist a in \mathcal{A} eine *Nullstelle* der Funktion f , falls $f(a) = 0$. Erneut müssen wir voraussetzen, dass die Zielmenge der Funktion 0 enthält; andernfalls wäre die Definition sinnlos.

Allgemein ist es vor allem dann gut, die Nullstellen und Fixpunkte einer Funktion zu betrachten, wenn man schon etwas über sie herausgefunden hat. Kehren wir zum Beispiel ?? zurück, so erinnern wir uns, dass wir die Gleichung $\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$ für alle y in \mathbb{R}^+ hergeleitet haben. Dazu haben wir festgestellt, dass 1 der einzige Fixpunkt von f ist, was der Schlüsselschritt in der Lösung war.

Betrachten wir nun ein Beispiel von der IMO 1994.

Beispiel 27. (IMO 1994) Finde alle Funktionen $f: (-1; +\infty) \rightarrow (-1; +\infty)$, welche die beiden folgenden Bedingungen erfüllen :

- (a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ für alle x, y in $(-1; +\infty)$
 (b) Die Funktion $f(x)/x$ ist streng monoton steigend auf den Intervallen $(-1; 0)$ und $(0; +\infty)$.

Lösung. Sei f eine Funktion welche obige Bedingungen erfüllt. Mit $x = y$ in (a) folgt

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x). \quad (12)$$

Das bedeutet, dass $x + f(x) + xf(x)$ ein Fixpunkt von f für alle x in $(-1; +\infty)$ ist. Wir versuchen daher, etwas über die Fixpunkte von f herauszufinden.

Für das haben wir die zweite Bedingung (b). Per Definition ist $a \neq 0$ ein Fixpunkt von f wenn und nur wenn $\frac{f(a)}{a} = 1$. Nach (b) existiert also in den Intervallen $(-1; 0)$ und $(0; +\infty)$ höchstens je ein Fixpunkt, da die Funktion $f(x)/x$ den Wert 1 nur höchstens einmal pro Intervall annehmen kann.

Sei nun a ein Fixpunkt von f . Mit $x = y = a$ erhält man $f(2a + a^2) = 2a + a^2$. Somit ist $2a + a^2$ auch ein Fixpunkt von f . Ist $a > 0$ so gilt auch $a < 2a + a^2$ und somit hätte f mindestens zwei verschiedene Fixpunkte im Intervall $(0; +\infty)$, was nach (b) unmöglich ist. Analog gilt im Fall $-1 < a < 0$, dass $-1 < 2a + a^2 < a < 0$ und somit hätte f zwei verschiedene Fixpunkte im Intervall $(-1; 0)$, was ebenfalls unmöglich ist.

Somit kann nur 0 ein Fixpunkt von f sein und somit folgt aus der Gleichung (??), dass $x + f(x) + xf(x) = 0$ für alle x in $(-1; +\infty)$. Man erhält dadurch

$$f(x) = -\frac{x}{x+1}.$$

Wir überprüfen noch, ob die Funktion $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$ die beiden Ursprungsbedingungen erfüllt. Die Funktion $\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x+1}$ ist tatsächlich streng monoton steigend auf den beiden Intervallen $(-1; 0)$ und $(0; +\infty)$, somit ist (b) erfüllt. Darüber hinaus gilt auch (a), da

$$\frac{-x - \frac{-y}{y+1} - x \frac{-y}{y+1}}{x + \frac{-y}{y+1} + x \frac{-y}{y+1} + 1} = \frac{y-x}{x+1} = y + \frac{-x}{x+1} + y \frac{-x}{x+1}.$$

□

Dieses Beispiel suggeriert, die Fixpunkte von f zu betrachten, ohne es explizit zu erwähnen. Denkt an Fixpunkte, sobald ihr eine Gleichung der Form (??) erhaltet. Probiert dann etwas über diese Fixpunkte herauszufinden.

3.5 Periodizität

Bevor wir beginnen, definieren wir erstmal Periodizität. Sei I ein Intervall in \mathbb{R} und sei $c > 0$ eine reelle Zahl. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *periodisch mit Periode c* , wenn für alle $x \in I$ mit $x + c \in I$ die Gleichung $f(x + c) = f(x)$ gilt. Eine triviale Familie periodischer Funktionen sind zum Beispiel die konstanten Funktionen. Die klassischsten Beispiele für periodische Funktionen sind aber die Sinus- und Kosinusfunktionen. Wollt ihr ein weiteres Beispiel? Die Funktion $x \mapsto x - [x]$ beispielsweise hat jede natürliche Zahl als Periode.

Das Konzept der Periodizität ist manchmal ein bisschen irreführend, daher hier eine kleine Vorwarnung. Jedes ganze Vielfache von c ist natürlich auch eine Periode von f . Hingegen gibt es für eine Periodische Funktion nicht immer eine minimale Periode, im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen beispielsweise. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ wenn x rational und $f(x) = 0$ wenn x irrational ist besitzt jede rationale Zahl als Periode. Nichtsdestotrotz haben periodische Funktionen mit Definitionsmenge \mathbb{Z} immer eine kleinste Periode (da \mathbb{N} ein positives, minimales Element hat).

So gut wie immer sind Lösungsfunktionen von Funktionalgleichungen nur dann periodisch, wenn sie konstant sind. Natürlich ist das weder ein mathematischer Satz, noch eine unumstössliche Regel. Dennoch benutzt man die Periodizität beim Lösen von Funktionalgleichungen meistens indem man zeigt, dass eine Lösung nicht periodisch sein kann und somit jede potenzielle Periode gleich null ist. Hierzu folgendes Beispiel :

Beispiel 28. (Frankreich TST 2007) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sodass für alle ganzen Zahlen m und n

$$f(m + f(n) - n) = f(m) + f(n).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wir erinnern uns, dass wenn alle Variablen ausschliesslich innerhalb von Funktionaltermen auftreten, dann empfiehlt es sich, das Egalisieren von Funktionaltermen anzustreben. Setzt man beispielsweise $m = 2n - f(n)$ so folgt $f(n) = f(2n - f(n)) + f(n)$ und somit $f(2n - f(n)) = 0$. Insbesondere hat 0 ein Urbild.

Mit kleinem Aufwand (und gewissem Optimismus) bemerkt man, dass die einzigen potentiellen Lösungen die Nullfunktion und $n \mapsto 2n$ sind. Wenn wir also indem wir die Nullfunktion ausschliessen die Injektivität von f in 0 zeigen können (also die Implikation $f(a) = 0 \implies a = 0$), dann können wir aus obiger Gleichung $f(n) = 2n$ für alle ganzen Zahlen n schliessen.

Nehmen wir also an, es existiert $a \neq 0$ sodass $f(a) = 0$, andernfalls könnten wir direkt $f(n) = 2n$ für alle ganzen Zahlen n folgern. Die Substitution $m = n = a$ in der Ursprungsgleichung liefert $f(0) = 0$. Wenn wir nur $n = a$ setzen, so erhalten wir $f(m-a) = f(m)$ für alle ganzen Zahlen m . Anders gesagt ist f eine periodische Funktion, die jede ganze Zahl $b \neq 0$ sodass $f(b) = 0$ als Periode zulässt. Wir haben schon gezeigt, dass $f(2n - f(n)) = 0$, also ist insbesondere $2 - f(1)$ eine Periode von f .

Setzt man nun $n = 1$ in der Ursprungsgleichung, so folgt

$$f(m + f(1) - 1) = f(m) + f(1).$$

Da $2 - f(1)$ eine Periode von f ist (im weiteren Sinne, wir setzen nicht $2 - f(1) > 0$ voraus), haben wir auch

$$f(m + f(1) - 1) = f(m + f(1) - 1 + 2 - f(1)) = f(m + 1).$$

Somit gilt $f(m + 1) = f(m) + f(1)$ für jede ganze Zahl m ; mit Induktion zeigen wir dann $f(m) = mf(1)$. Wir erinnern uns aber, dass f periodisch ist, somit kann sie nur linear sein, wenn sie konstant ist. Tatsächlich haben wir $f(m + a) = f(m)$ und somit $(m + a)f(1) = mf(1)$. Da $a \neq 0$ folgt daraus $f(1) = 0$, somit ist f die Nullfunktion.

Überprüfen wir nun noch, ob die Nullfunktion und $n \mapsto 2n$ tatsächlich Lösungen sind. Im ersten Fall sehen wir, dass $0 = 0$, im zweiten

$$2(m + 2n - n) = 2m + 2n.$$

□

Wir haben im obigen Beispiel verwendet, dass eine lineare, periodische Funktion konstant ist. Allgemeiner gilt sogar, dass eine monotone, periodische Funktion konstant sein muss. Tatsächlich, ist I ein Intervall mit Länge grösser als c und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone, periodische Funktion mit Periode c , dann ist f konstant auf I ! Das ist auch gar nicht so schwierig zu zeigen. Für alle x in I mit $x + c \in I$ gilt nach Periodizität $f(x + c) = f(x)$ und somit nach Monotonie auch $f(x) \leq f(y) \leq f(x + c)$ (oder $f(x) \geq f(y) \geq f(x + c)$ im fallenden Fall) für alle $x \leq y \leq x + c$. Somit ist f konstant auf allen geschlossenen Intervallen der Länge c und somit konstant auf ganz I .

Noch allgemeiner braucht man statt der Periodizität für dieses Argument lediglich, dass f den gleichen Wert an mehreren Stellen annimmt. Ist beispielsweise $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion für welche $f(x) = a$ für alle ganzen, nicht-negativen Zahlen x . Dann gilt mit dem gleichen Argument sogar $f(x) = a$ für alle x in \mathbb{R}^+ , also dass f konstant ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Solche Ideen können manchmal hilfreich sein, wie wir am folgenden Beispiel sehen:

Beispiel 29. (*Shortlist 2005*) Bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}^+

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)).$$

Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

In dieser Aufgabe ist schwierig zu sehen, wie man anfangen soll. Die konstante Funktion $f(x) = 2$ ist natürlich eine Lösung, aber ist sie die einzige? Schaut man sich die Lage ein wenig genauer an, so kommen die folgenden zwei natürlichen Fragen auf:

- (1) Ist es möglich ein y zu finden, sodass das Funktionsargument der rechten Seite den gleichen Wert für zwei verschiedene Werte von x annimmt? Das führt wahrscheinlich zu einer nützlichen Identität. Seien also $0 < u < v$ und suchen wir y sodass $u + yf(u) = v + yf(v)$. Auflösen liefert:

$$y = \frac{v - u}{f(u) - f(v)}.$$

Die Substitution ist somit nur erlaubt, wenn $f(u) > f(v)$. Nehmen wir an, dies sei der Fall, so nimmt die rechte Seite der Gleichung für die Werte $x = u$ und $x = v$ den gleichen Wert an. Somit gilt dies auch für die linke Seite. Da $f(y) \neq 0$ führt dies zu $f(u) = f(v)$. Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass wenn reelle Zahlen $0 < u < v$ mit $f(u) > f(v)$ existieren, dann gilt $f(u) = f(v)$, was natürlich absurd ist. Somit gilt für alle $u < v$, dass $f(u) \leq f(v)$; wir haben also (überraschenderweise) gezeigt, dass f monoton steigend ist.

- (2) Was passiert, wenn f an zwei verschiedenen Stellen denselben Wert annimmt? Sei also $0 < u < v$ mit $f(u) = f(v)$. Für alle $y > 0$ gilt dann

$$2f(u + yf(u)) = f(u)f(y) = f(v)f(y) = 2f(v + yf(v)).$$

Das scheint nun eine Art Periodizität für f zu implizieren, nämlich mit der Periode $c = v - u$. Tatsächlich: Sei $z > u$ beliebig, und setze $y = \frac{z-u}{f(u)} > 0$ in diese Gleichung ein, dann folgt $f(z) = f(u + yf(u)) = f(v + yf(v)) = f(z + c)$. Daher ist f auf dem Intervall (u, ∞) periodisch und nach (1) monoton steigend, also nach dem vorigen Argument konstant. Setzt man nun $x, y > u$ in die ursprüngliche Gleichung ein (man beachte, dass in diesem Fall auch $x + yf(y) > u$ gilt), dann folgt sofort, dass diese Konstante gleich 2 sein muss. Das ist beinahe was wir wollten. Die Einschränkung, dass f erst ab u konstant 2 ist, lässt sich nun aber sehr einfach beheben: Sei y beliebig und sei $x > u$ in der ursprünglichen Gleichung, dann folgt wegen $x + yf(x) > u$ sofort $2f(y) = 2 \cdot 2$, also $f(y) = 2$ für alle $y > 0$.

Wir müssen nun also nur noch zeigen, dass zwei verschiedene positive reelle Zahlen existieren, für welche f den selben Wert annimmt. Nehmen wir an, dem sei nicht so; das bedeutet dann, dass f injektiv ist.

Benutzen wir die Symmetrie der linken Seite der Ursprungsgleichung, so erhalten wir

$$2f(x + yf(x)) = f(x)f(y) = f(y)f(x) = 2f(y + xf(y)),$$

Und somit $x + yf(x) = y + xf(y)$ da f injektiv ist. Mit $y = 1$ erhält man somit $f(x) = (f(1) - 1)x + 1$ für alle $x > 0$. Einsetzen in die Ursprungsgleichung zeigt aber, dass diese Funktionen allesamt keine Lösungen sind, somit kann f nicht injektiv sein.

Nun bleibt noch zu überprüfen, ob die konstante Funktion $x \mapsto 2$ tatsächlich eine Lösung ist. Dem ist so, da $2 \cdot 2 = 2 \cdot 2$. \square

3.6 Die Lösungsgesamtheit und neue Funktionen

Löst man eine Funktionalgleichung, so ist es sehr wichtig, schon zu Beginn die elementaren Lösungen zu erraten. Die Form dieser Lösungen kann einen grossen Einfluss auf unsere Lösungsstrategie haben. Beispielsweise haben wir ja gesehen, dass wenn es konstante Lösungen gibt, dann probieren wir nicht Injektivität zu zeigen, ehe wir diese ausgeschlossen haben; ähnliches gilt auch für Surjektivität, Monotonie oder Fixpunkte.

Oftmals errät man eine Lösung und ist überzeugt davon, dass sie die einzige ist. In solchen Fällen kann man probieren, direkt die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Ein erstes Beispiel hierfür sind die Induktionsrelationen. Gelangen wir zu einer Gleichung, die es erlaubt $f(n+1)$ aus $f(n), \dots, f(0)$ zu berechnen und haben $f(n)$ für kleine Werte von n bereits berechnet, so folgt aus diesen Bedingungen, unter anderem, die Eindeutigkeit der Lösung. Man könnte dann auch einfach eine Lösung der Ursprungsgleichung erraten und sich die Induktion ersparen, oft ist aber der Aufwandsunterschied nur klein.

Betrachten wir nun ein anderes, direkteres Beispiel.

Beispiel 30. Bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in \mathbb{R}

$$f(xy) + x^2 + y^2 = xy + f(x^2) + f(y^2).$$

Klassische Methode. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Die klassische Methode ist das Substitutionsgelage. Mit $x = y = 0$ folgt $f(0) = 0$, dann mit $f(0) = 0$ auch $f(x^2) = x^2$. Nun benutzen wir diese letzte Gleichung um die Ursprungsgleichung ein wenig zu vereinfachen; das ergibt $f(xy) = xy$. Mit $y = 1$ folgt in dieser letzten Gleichung also auch $f(x) = x$.

Die Identitätsfunktion ist natürlich eine Lösung, da $xy + x^2 + y^2 = xy + x^2 + y^2$. \square

Lösung durch Eindeutigkeit. Wir versuchen zu zeigen, dass die Funktionalgleichung höchstens eine Lösung haben kann. Dazu nehmen wir an, dass f_1 und f_2 zwei Lösungen der Gleichung sind und setzen $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Subtrahiert man die beiden Gleichungen für f_1 und f_2 , so erhält man die einfachere Gleichung

$$g(xy) = g(x^2) + g(y^2)$$

Für g . Mit $x = y = 0$ folgt $g(0) = 0$; mit $y = 0$ dann auch $g(x^2) = 0$, also anders gesagt $g(z) = 0$ für alle $z \geq 0$. Zum Schluss setzten wir $y = 1$ was $g(x) = g(x^2) + g(1) = 0 + 0 = 0$ für alle x in \mathbb{R} ergibt. Somit gilt aber $f_1 = f_2$, was zeigt, dass falls eine Lösung existiert, dann ist sie eindeutig. Da $x \mapsto x$ die Ursprungsgleichung erfüllt, ist dies demnach die einzige Lösung. \square

Eine weitere Möglichkeit ist es, neue Funktionen einzuführen; ein bisschen wie g in der obigen Lösung. Im Allgemeinen ist es um einiges einfacher zu zeigen, dass eine gegebene Funktionalgleichung nur konstante Lösungen oder Lösungen der Form $f(x) = cx$ hat, als zu zeigen, dass sie kompliziertere Funktionen wie $f(x) = 2x + 1$ oder gar $f(x) = x^4 - 3x$ hat. Das wird später noch mehr Sinn ergeben, insbesondere wenn wir eine Funktionalgleichung in eine Cauchy-Funktionalgleichung umformen wollen. Man kann also probieren, die gesuchte Funktion durch eine andere, einfachere Funktion auszudrücken. Damit nun eine dritte Lösung für dieses letzte Beispiel.

Dritte Lösung. Sei f eine Lösung obiger Gleichung.

Wir wissen bereits, dass $f(x) = x$ eine Lösung ist, und wir wollen zeigen, dass es keine anderen gibt. Wir führen eine neue Funktion g ein indem wir $g(x) = f(x) - x$ setzen. In der Ursprungsgleichung folgt damit die einfachere Gleichung

$$g(xy) = g(x^2) + g(y^2)$$

für g . Aus der zweiten Lösung folgt nun aber, dass g die Nullfunktion sein muss. Somit schliessen wir $f(x) = x + g(x) = x$. \square

Eine andere Variante wäre gewesen, g durch $f(x) = xg(x)$ zu definieren. Aber Achtung, diese Substitution impliziert $f(0) = 0$ (setzt $x = 0$) ! Somit können wir diese Substitution nur machen, falls wir $f(0) = 0$ bereits gezeigt haben, was hier nicht schwierig ist. Wir müssen also den Wert von $g(0)$ nicht festlegen. Hier ergibt diese Substitution aber eine kompliziertere Gleichung als jene für f , aber manchmal kann auch diese Substitution nützlich sein.

Dieses Verfahren ist nur dann sinnvoll, wenn man sich recht sicher ist, dass die gefundene Lösung die einzige ist. Betrachten wir Beispiel ??; dort sind $x \mapsto 0$ und $x \mapsto x^2$ beides Lösungen, wie man leicht sieht. Es bringt daher wenig, eine neue Funktion g durch $f(x) = x^2 - g(x)$ zu definieren. Man muss dann ja zeigen, dass g entweder identisch verschwindet, oder dass $g(x) = -x^2$ ist. Das ist mindestens so schwierig wie die ursprüngliche Aufgabe. Sinnvoller (wenn schon) wäre die Definition $f(x) = x^2/2 + g(x)$. Damit hat man immerhin eine gewisse Symmetrie gewonnen (die Lösungen wären dann $g(x) = \pm x^2/2$).

Die Lage ist nochmals anders im Beispiel ??, wo man eine Lösungsfamilie von Funktionen der Form $f(x) = c/x$ mit einer positiven Konstanten c hat. Es bringt hier also nichts zu zeigen, dass die Lösung eindeutig ist (da das gar nicht nicht stimmt) und eine Substitution der Form $g(x) = xf(x)$ macht auch nicht viel Sinn. Die folgende Sichtweise kann allerdings manchmal nützlich sein: wir bemerken, dass die Summe von zwei Lösungsfunktionen ebenfalls eine Lösung ist; man sieht das, indem man die beiden Gleichungen für diese Lösungen addiert. Ähnlich sieht man auch, dass jedes skalare Vielfache eine Lösung ebenfalls eine Lösung ist. Somit könnten wir (nachdem wir $f(1) \neq 0$ gezeigt haben) die Funktion $g(x) = f(x)/f(1)$ einführen. Die resultierende Gleichung für g ist die gleiche wie für f , aber wir haben zusätzlich auch $g(1) = 1$ (setzt $x = 1$ in der Substitutionsformel). Für eine beliebige Lösung ist das keineswegs der Fall, somit könnte uns diese

zusätzliche Bedingung die Eindeutigkeit der Lösung liefern. Hier müsste man zeigen, dass g die Kehrwertfunktion $1/x$ ist.

In diesem Beispiel ist der Gewinn an Informationen nur gering. Diese Methode ist vor allem dann sehr stark, wenn nichts anderes zu funktionieren scheint. Merkt euch, dass das Einführen einer neuen Funktion selten einen massgeblichen Fortschritt liefert. Es erlaubt, wenn korrekt durchgeführt, die Aufgabe aus einer anderen Perspektive zu sehen und so eine bessere Intuition für die Schlüsselmanöver beim Lösen einer Funktionalgleichung zu erlangen.