Équations fonctionnelles II
Les équations de Cauchy

Thomas Huber, Arnaud Maret

Actualisé: 23 février 2018
vers. 2.0.0

1 Les quatre fantastiques

Allons un bout plus loin dans la théorie des équations fonctionnelles. Ce script traite d'une famille de quatre équations fonctionnelles, à première vue inoffensives, connues sous le nom d'*équations de Cauchy*. On les rencontre parfois après une réduction appropriée d'une équation moins standard. Néanmoins, la résolution des équations de Cauchy requiert de nouveaux outils d'analyse dont notamment les notions de *continuité* d'une fonction et de *densité* dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Nous introduirons intuitivement ces notions en temps voulu.
Nous allons procéder de la manière suivante : nous traiterons tout d'abord de l'équation de Cauchy la plus classique, puis nous étendrons nos résultats aux trois autres équations par un simple jeu de substitutions. Voilà le problème que l'on se propose de résoudre :

Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Soit f une solution de l'équation de Cauchy ci-dessus. En gardant toujours les bons réflexes, on commence par identifier les solutions potentielles. Une recherche rapide et nous trouvons que toutes les fonctions linéaires $x \mapsto ax$, avec a un nombre réel, sont solutions.
L'étape suivante consiste à calculer quelques valeurs de base que prend f. On a facilement $f(0) = 0$. Sans trop d'effort et en se souvenant du premier script, on arrive à montrer que $f(q) = qf(1)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. Cette étape est cordialement laissée en exercice ici. De manière plus générale, $f(qx) = qf(x)$ pour tout rationnel $q \in \mathbb{Q}$ et pour tout nombre réel x cette fois.
C'est ici que le ciel nous tombe sur la tête. Sans hypothèse supplémentaire sur f, vous ne déduirez rien de plus de concluant sur les fonctions solutions. Y aurait-il d'autres solutions que les fonctions linéaires ? Eh bien, tenez-vous bien, oui ! Il en existe même une infinité. En revanche, on ne peut pas décrire ces solutions exotiques à l'aide d'une formule explicite simple (comme pour les fonctions linéaires). Figurez-vous que si l'on s'attelait à dessiner leur graphe sur le plan $\mathbb{R}^2$ et bien il y aurait des points absolument partout (malgré le fait que chaque nombre réel a exactement une image via cette fonction solution !). C'est le concept de densité déjà cité plus haut. Une intrigue digne d'un best-seller pour collégiens ! La construction de ces solutions exotiques repose sur *l'axiome du choix*. On y reviendra en fin de script.

La linéarité de f sur $\mathbb{Q}$ repose essentiellement sur l'induction. Une méthode propre aux nombres entiers que l'on ne peut pas étendre à $\mathbb{R}$. Pour continuer à partir d'ici, on a besoin d'imposer des conditions supplémentaires sur f. La condition de loin la plus importante pour nous sera la monotonie.

Lemme 1.1. *Soit f une solution* ***monotone*** *de l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Alors f est une fonction linéaire, à savoir, il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Si f est solution de l'équation de Cauchy, alors $-f$ est aussi une solution. On peut donc supposer sans perte de généralité que f est croissante. On sait déjà que $f(q) = qf(1)$ pour tout rationnel q. Noter que si f est croissante, alors $f(1) \geq f(0) = 0$.
Supposons maintenant qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > xf(1)$. Si $f(1) = 0$, alors par croissance de f, pour tout nombre rationnel $q > x$, on a $0 = f(q) \geq f(x) > 0$. C'est une contradiction. Si $f(1) > 0$, alors on choisit un nombre rationnel[1] q tel que $f(x)/f(1) > q > x$. Par croissance de f, comme $q > x$, alors $qf(1) = f(q) \geq f(x)$. Mais par construction, $f(x) > qf(1)$. On obtient également une contradiction.
Le cas $f(x) < xf(1)$ est similaire. On déduit donc que $f(x) = xf(1)$ pour tous les réels x. □

Rappelez-vous de ce schéma de preuve par contradiction pour étendre une solution de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. C'est une méthode assez classique. Passons de suite à un exemple.

Exemple 1 (IMO 1992)**.** *Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation. Nous avons déjà montré dans le premier script (eh oui !) que $f(0) = 0$ (si vous ne vous souvenez plus comment, c'est un excellent exercice !). Nous pouvons donc substituer $x = 0$ pour obtenir $f(f(y)) = y$. Avec $y = 0$, on obtient de plus $f(x^2) = f(x)^2$.
Astuce classique à essayer en ayant $f(f(y)) = y$: remplaçons les y par $f(y)$ dans la première équation. On obtient alors, après simplification et utilisant aussi $f(x^2) = f(x)^2$:

$$f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y).$$

Cela ressemble déjà à une équation de Cauchy, à la différence près que x^2 ne peut naturellement prendre que des valeurs positives. En d'autres termes, nous avons "seulement" :

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad \text{pour tout } u \geq 0 \text{ et tout } v \in \mathbb{R}.$$

On va donc commencer par se débarrasser de la condition gênante $u \geq 0$. Pour cela nous allons utiliser l'imparité de f. (Posons $v = -u$ avec $u \geq 0$, il s'ensuit $0 = f(0) = f(u) + f(-u)$, donc $f(-u) = -f(u)$ pour $u \geq 0$ a priori. Le signe "$-$" permet de conclure l'imparité de f en général.)
On obtient ainsi pour tout $u \geq 0$, $f((-u)+v) = -f(u+(-v)) = -f(u)-f(-v) = f(-u)+f(v)$.
On conclut ainsi que $f(u + v) = f(u) + f(v)$ pour tous les réels u, v cette fois.
Il nous reste à montrer la monotonie de f. L'argument qui va suivre est assez fondamental et

[1] L'existence de q est une conséquence de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Par densité on entend ici que quelque soient $x < y$ deux nombres réels distincts, alors il existe toujours un nombre rationnel entre deux. C'est une conséquence du principe des tiroirs.

mérite qu'on s'en souvienne. L'équation $f(x^2) = f(x)^2$, implique en particulier que $f(x) \geq 0$ lorsque $x \geq 0$.
Nous avons maintenant tous les ingrédients pour déduire la croissance de f. Soient donc $a \geq b$ deux nombres réels. On a

$$f(a) = f(b) + f(a-b) \geq f(b),$$

car $a - b \geq 0$. On conclut que f est une fonction linéaire $x \mapsto cx$ et en remplaçant dans l'équation de base on a $c = 1$.

□

La continuité de f en un point est aussi une condition suffisante pour garantir la linéarité. Bien que dans le contexte des olympiades il est rare que le concept de continuité apparaisse, nous allons quand même en parler ici.

Définition 1.1. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *continue en* x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. L'idée de cette définition est d'empêcher la fonction f de faire un saut brusque au voisinage de x_0
On dit que f est *continue*, si f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En termes plus visuels, f est continue, si l'on peut tracer le graphe de f sans lever le crayon.

Lemme 1.2. *Soit f une solution* ***continue en au moins un point*** *x_0 de l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Alors f est une fonction linéaire, à savoir, il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Tout d'abord, noter que $f(\epsilon) = f(x_0+\epsilon) - f(x_0)$. Comme $\lim_{\epsilon\to 0} f(x_0+\epsilon) = f(x_0)$ par continuité de f en x_0, on conclut que $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = 0 = f(0)$ et donc f est continue en 0. De plus, $f(x+\epsilon) = f(x) + f(\epsilon) \to f(x)$ lorsque $\epsilon \to 0$ et donc f est continue en x également. Comme x est arbitraire, f est donc continue. On a ainsi montré qu'une fonction qui satisfait l'équation de Cauchy et qui est continue en un point est en fait continue partout.
On sait déjà que f est continue et vaut $qf(1)$ sur tous les rationnels q. Comment pouvons nous dessiner le graphe de f continument en sachant qu'il doit passer par tous les points $(q, qf(1))$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$? Intuitivement, la continuité et la valeur connue sur tous les rationnels forcent la forme de f à être linéaire partout.
Plus précisément, soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\epsilon > 0$. On trouve un nombre rationnel q_ϵ tel que $x < q_\epsilon < x+\epsilon$. Noter que lorsque $\epsilon \to 0$, alors $q_\epsilon \to x$. Donc

$$f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f(q_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} q_\epsilon f(1) = xf(1).$$

Ainsi, $f(x) = xf(1)$ pour tous les réels x. □

En plus de la monotonie et de la continuité, la densité est également un critère encore plus général qui garantit la linéarité des solutions. Nous allons commencer par définir (enfin) ce terme :

Définition 1.2. Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est appelé *dense dans* $\mathbb{R}^2$ si tout disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$ de rayon strictement positif contient au moins un point de A. En d'autres termes, les points de A se trouvent "partout dans $\mathbb{R}^2$".

Par exemple $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$ au même titre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ce critère nous permet de donner une caractérisation complète des solutions de l'équation de Cauchy. La preuve est un tant soit peu technique, mais le résultat en soi est très fort.

Théorème 1.3. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Alors, seulement deux cas mutuellement exclusifs peuvent se produire :*

(a) *la fonction f est linéaire,*

(b) *le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Supposons que f n'est pas linéaire. Il existe donc des nombres réels $x, y \neq 0$ tels que $a := f(x)/x$ et $b := f(y)/y$ soient deux nombres réels distincts. Pour des raisons techniques nous n'allons pas démontrer que tout disque ouvert contient un point du graphe, mais que chaque carré ouvert contient un tel point (ce qui revient naturellement au même). Soit donc $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ un point fixé et soit $\epsilon > 0$ fixé. Nous prenons

$$\xi_1 := \frac{v - bu}{a - b}, \qquad \xi_2 := \frac{au - v}{a - b},$$

pour que les équations suivantes soient vérifiées :

$$\xi_1 + \xi_2 = u, \qquad a\xi_1 + b\xi_2 = v.$$

Choisissons des nombres rationnels r_1, r_2 avec

$$|r_1 x - \xi_1| < \min\left\{1, \frac{1}{|a|}\right\} \cdot \frac{\epsilon}{2}, \qquad |r_2 y - \xi_2| < \min\left\{1, \frac{1}{|b|}\right\} \cdot \frac{\epsilon}{2}.$$

Naturellement, si $a = 0$, on prendra r_1 tel que $|r_1 x - \xi_1| < \frac{\epsilon}{2}$ (de même si $b = 0$.) Cela revient à choisir r_1 rationnel suffisamment proche de ξ_1/x et de même pour r_2. Nous avons d'une part

$$\begin{aligned} |(r_1 x + r_2 y) - u| &= |(r_1 x - \xi_1) + (r_2 y - \xi_2)| \\ &\leq |(r_1 x - \xi_1)| + |(r_2 y - \xi_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

D'autre part les facteurs rationnels peuvent, d'après le lemme 2.1., être sortis de f et donc nous avons aussi

$$\begin{aligned} |f(r_1 x + r_2 y) - v| &= |(r_1 a x + r_2 b y) - (a\xi_1 + b\xi_2)| \\ &\leq |a||(r_1 x - \xi_1)| + |b||(r_2 y - \xi_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le point $(r_1 x + r_2 y, f(r_1 x + r_2 y))$ du graphe de f se trouve dans le carré de centre (u, v) et de côtés 2ϵ. Comme (u, v) et $\epsilon > 0$ étaient arbitraires, chaque carré dans $\mathbb{R}^2$, aussi petit soit-il, contient au moins un point du graphe de f. Le graphe de f est donc dense dans $\mathbb{R}^2$.

□

Le théorème 1.3 est un résultat plus fort que les lemmes précédents. Par exemple, si f est une solution **croissante** de l'équation de Cauchy, alors le graphe de f ne contient aucun point des deux régions $(-\infty, x) \times (f(x), \infty)$ et $(x, \infty) \times (-\infty, f(x))$, et donc n'est pas dense.
De même, si f est **minorée** (ou bornée par en-dessous), c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors le graphe de f ne contient aucun point de la région $\mathbb{R} \times (-\infty, C)$, et donc de nouveau n'est pas dense. On en déduit que f est linéaire et comme f est minorée, nécessairement $f \equiv 0$. Il en va évidement de même pour les solutions **majorées**

de l'équation de Cauchy.
D'ailleurs, il suffit que f soit **minorée (ou majorée) sur un intervalle** I de longueur non nulle. Dans ce cas aussi, le graphe de f n'est pas dense car il ne contient aucun point de la région $I \times (-\infty, C)$. À noter qu'en particulier toute fonction **continue** est bornée sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.
Si l'on revient à l'exemple 1, nous avions établi $f(x^2) = f(x)^2$. Cette équation implique que f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et donc f est linéaire par le théorème 1.3.

Introduisons à présent les trois autres équations de Cauchy :

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f(x+y) = f(x) + f(y), && (1)\\ &f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, && f(xy) = f(x)f(y), && (2)\\ &f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, && f(xy) = f(x) + f(y), && (3)\\ &f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, && f(x+y) = f(x)f(y). && (4) \end{aligned}$$

Noter bien que les domaines de définition et d'arrivée sont différents selon l'équation. Par exemple, dans l'équation (3), s'il on cherchait des solutions $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, alors substituer $x = 0$ donnerait immédiatement l'unique solution $f \equiv 0$.
Les trois nouvelles équations de Cauchy ne sont en fait pas ontologiquement différentes de la première. En effet, supposons que f soit une solution de l'équation (3), alors la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\exp x)$ est une solution de l'équation (1). En effet,

$$g(x+y) = f(\exp(x+y)) = f(\exp x \cdot \exp y) = f(\exp x) + f(\exp y) = g(x) + g(y).$$

De même si f est une solution de (4), alors $\log f$ est une solution de (1). Si f est une solution de (2), alors $x \mapsto \log(f(\exp x))$ est une solution de (1). La morale étant que lorsque vous êtes confrontés à une équation (2) à (4), alors une substitution permet de revenir à l'équation de Cauchy standard. Les solutions non-pathologiques sont donc : $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, pour (2), $x \mapsto a \log x$, $a \in \mathbb{R}$, pour (3) et $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$ pour (4).
Le théorème 1.3 s'applique donc aussi aux équations (2),(3) et (4) avec une modification approriée du terme "linéaire" et du domaine de densité. Par exemple, une solution de (4) n'est pas de la forme $x \mapsto a^x$ si et seulement si son graphe est dense dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.

Voyons encore un dernier exemple pour la route :

Exemple 2. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = (f(x) + x)(f(y) + y).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation. Il n'est pas très clair a priori quelle fonction peut bien satisfaire cette équation. Quelques substitutions de base nous permettent de calculer quelques termes, mais sans faire de progrès très concret. Pas sûr non plus que l'injectivité ou la surjectivité potentielles soient d'un grand secours ici. Tentons une substitution.
Les parenthèses du côté droit nous donnent l'idée d'introduire la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + x$. Noter que malgré que le domaine d'arrivée de f soit $\mathbb{R}_{\geq 0}$, on ne peut pas a priori restreindre le domaine d'arrivée de g. L'équation se simplifie alors en

$$g(x+y) - g(x) - g(y) = g(x)g(y).$$

Cela fait penser à un mélange entre les équations de Cauchy additive et multiplicative. En modifiant l'équation nous trouvons la forme équivalente $g(x+y) = (g(x)+1)(g(y)+1) - 1$. Allez ! Substituons encore $h(x) := g(x) + 1$ et pour finalement obtenir

$$h(x+y) = h(x)h(y).$$

C'est à présent que l'on sait que nos substitutions étaient judicieuses. Il s'agit évidement de l'équation de Cauchy (4). Attention toutefois, a priori h est uniquement une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Il ne s'agit donc pas encore exactement du problème de Cauchy (4).
Heureusement, on peut remédier à ce petit problème. En posant $x = y$ dans l'équation pour h, on obtient $h(2x) = h(x)^2 \geq 0$ pour tout x, donc h ne prend jamais de valeur négative. Si, de plus, il existait un x_0 avec $h(x_0) = 0$, alors en substituant $x = x_0$, on obtient $h(x_0+y) = 0$. Ceci est vrai pour tout y et donc $h \equiv 0$. Cependant, dans ce cas, en remontant nos substitutions, on aurait $f(x) = -x - 1$ ce qui n'est pas permis.
Nous cherchons donc bien des fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ comme il est requis. Les solutions classiques sont dans ce cas les fonctions $h(x) = a^x$ avec une constante positive a. Pour exclure les solutions exotiques, nous devons encore montrer que le graphe de h n'est pas dense dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$. Rappelons nous que l'on a supposé que $f(x) \geq 0$. Ainsi, $g(x) \geq x$ et donc $h(x) \geq x+1$ pour tous les nombres réels x. Ainsi le triangle infini

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : y < x + 1\},$$

borné par l'axe horizontal et la droite $y = x + 1$, ne contient aucun point du graphe de h. Le graphe de h n'est donc pas dense dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Finalement, on a bien $h(x) = a^x$ pour un certain $a > 0$ et donc $f(x) = a^x - x - 1$.
Remplaçons dans l'équation initiale et l'on remarque qu'une telle fonction f satisfait l'équation de départ. Mais attention ! On doit avoir $f(x) \geq 0$ pour tout x. C'est-à-dire qu'il faut trouver tous les nombres positifs a pour lesquels l'équation $a^x \geq x + 1$ est vérifiée pour tout x.
Pour cela nous utilisons des méthodes analytiques : les graphes de a^x et $x + 1$ passent par le point $(0, 1)$ et doivent donc être tangents en ce point. En particulier la fonction $l(x) := a^x$ doit avoir pour dérivée 1 en $x = 0$. Comme $l'(x) = \log(a) \cdot a^x$, il faut que $a = e$ (constante d'Euler). La fonction $x \mapsto e^x$ est bien convexe et admet précisément en $x = 0$ la droite tangente $y = x+1$ ce qui implique $e^x \geq x+1$ pour tout x. La seule solution de notre équation est donc la fonction

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

$\square$

1.1 Solution générale de l'équation de Cauchy additive

Pour finir, nous discutons encore de la solution générale de l'équation de Cauchy additive. L'élément clé de tout cela est l'existence de ce qu'on appelle une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$. Un ensemble $\mathcal{B}$ de nombres réels est appelé une $\mathbb{Q}$-*base*, si tout nombre réel s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire rationnelle finie d'éléments de $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe des nombres $\alpha_b \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathcal{B}$ uniquement déterminés, tels que seul un nombre fini de α_b sont non-nuls et tels que $x = \sum_{b\in\mathcal{B}} \alpha_b \cdot b$. L'existence d'une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ découle de l'axiome du choix et ne peut donc pas être explicitée. De plus, il est facile de voir qu'une $\mathbb{Q}$-base est nécessairement indénombrable.

Soit maintenant f une solution de l'équation de Cauchy additive et $\mathcal{B}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$. On a alors, pour $x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \alpha_b \cdot b$,

$$f(x) = f\Big(\sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b\Big) = \sum_{b \in B} \alpha_b f(b), \tag{5}$$

où l'on a utilisé que seul un nombre fini de α_b était non-nul et qu'ils étaient tous rationnels. On en déduit que f est entièrement déterminée par les valeurs prises sur l'ensemble $\mathcal{B}$.
Inversement on peut choisir $f(b)$ comme l'on veut et *définir* f par l'équation (5). Le fait que f est alors vraiment bien définie et additive découle de l'existence et l'unicité de l'expression de chaque x comme une $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire finie des éléments de $\mathcal{B}$.
L'ensemble des fonctions solutions comprend ainsi tous les degrés de liberté pour le choix de $f(b)$, pour tous les b dans $\mathcal{B}$. Le cas d'une solution linéaire correspond alors au cas $f(b) = a \cdot b$ pour tous $b \in \mathcal{B}$. Cela signifie que l'on est dans le cas particulier où toutes les valeurs $f(b)$, choisies librement, sont 'coordonnées'. Il s'agit vraiment ici d'une exception rare. On peut ainsi affirmer que les solutions linéaires (non-pathogènes) forment une infime minorité !

2 Équations fonctionnelles de type-Cauchy

Certains problèmes ressemblent fortement à des équations de Cauchy. Seulement, leur résolution n'utilise pas les résultats de la section précédente. Il faut donc adapter les schémas de preuve aux problèmes en question. On s'attend donc naturellement à devoir appliquer un argument proche de la continuité pour étendre nos solutions de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ par exemple. Il n'y a à nouveau pas de théorie à présenter ici, seulement des exemples clés.

Exemple 3. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation. A priori, l'équation de base est obtenue par addition de deux équations de Cauchy. Après une courte recherche, on identifie trois solutions : la fonction identité et les constante 2 et 0. Commençons comme toujours par quelques substitutions de base.
Poser $x = y = 0$ mène à $f(0)^2 = 2f(0)$ et donc $f(0) = 2$ ou $f(0) = 0$. Si $f(0) = 2$, alors substituer $x = 0$ donne immédiatement la solution constante $f \equiv 2$.
Il nous reste à séparer les deux solutions 0 et l'identité. Supposer que $f(1) = 0$ amène à la solution $f \equiv 0$ et si $f(1) \neq 0$, alors on peut montrer que $f(q) = q$ pour tout rationnel q. Cette partie n'est pas présentée ici et laissée en exercice. Attention ! C'est un exercice standard, mais pas trivial. Vous êtes donc vivement encouragés à essayer.
Nous avons donc à présent que si f n'est pas constante, alors f est l'identité sur $\mathbb{Q}$. Poser $y = 1$ donne $f(x+1) = f(x)+1$. Par induction, $f(x+n) = f(x)+n$ pour tout réel x et entier n. Avec $y = n$, on déduit $f(nx) = nf(x)$ pour tout entier n. En particulier, f est impaire. En particulier $f(x) = nf(x/n)$ et donc $f(qx) = qf(x)$ pour tout rationnel q et réel x. Finalement, $y = q$ fournit $f(x + q) = f(x) + q$ pour tout réel x et rationnel q. Vous noterez qu'il faut effectuer les choses dans l'ordre pour arriver aux bonnes déductions dans cette section. Substituer $y = -x$ donne $f(x^2) = f(x)^2$ et donc $f(x) \geq 0$ pour des réels $x \geq 0$.
On passe maintenant à la meilleure partie : l'extension de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. C'est une manière de faire

standard. Il est donc judicieux de savoir la reproduire. Supposons qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) < x$. On prend alors un rationnel q tel que $f(x) < q < x$. On a alors

$$q > f(x) = f(x - q) + q \geq q,$$

car $x - q \geq 0$. On obtient ainsi une contradiction. On obtient la même contradiction en supposant $f(x) > x$. On conclut comme souhaité $f(x) = x$. $\square$

Le prochain exemple peut être vu comme un système d'inégalités de Cauchy. Ici, il est intéressant et non-trivial d'étendre nos déductions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}_{>0}$. La partie clé est bien plus subtile.

Exemple 4 (IMO 2013)**.** *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$, telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$*

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &\geq f(xy) \\ f(x+y) &\geq f(x) + f(y) \end{aligned}$$

et telles qu'il existe $a > 1$ avec $f(a) = a$.

Solution. Soit f une solution du problème. Ces inégalités annoncent de suite la couleur. C'est un problème de type-Cauchy. La méthode standard est donc de commencer par travailler sur $\mathbb{N}$, puis étendre à $\mathbb{Q}_{>0}$. Mais évidement on garde les bons réflexes. A priori seule l'identité parait être une solution. Commençons par quelques substitutions.
Poser $x = y = 1$ donne $f(1)^2 \geq f(1)$. Comme l'on ne sait rien du signe de $f(1)$, il y a trop de cas à traiter à partir de ce résultat. Quelle autre valeur de base est intéressante mis à part 1 dans ce problème ? Bien sûr a ! Poser $y = a$ donne $af(x) \geq f(ax)$ et donc avec $x = 1$, on obtient $f(1) \geq 1$. Inductivement, grâce à $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, on conclut que $f(n) \geq n$ pour tout entier positif n.
Peut-on étendre cette relation à $\mathbb{Q}_{>0}$? Appliquons la méthode standard :

$$f(p) = f\left(\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}\right) \geq qf\left(\frac{p}{q}\right).$$

Donc $f(p/q) \leq f(p)/q$ ce qui ressemble plutôt à l'inégalité renversée. Avec $x = \frac{p}{q}$, $y = q$, on obtient

$$f\left(\frac{p}{q}\right) f(q) \geq f(p).$$

Noter que $f(q) \geq q > 0$, nous pouvons donc diviser et obtenir $f(p/q) \geq f(p)/f(q)$. En particulier, on déduit que $f(p/q) > 0$. Cette observation parait triviale ici, mais il n'est pas facile de réaliser en examen que l'équation précédente implique la positivité des images.
Dans le contexte des équations de Cauchy comment avait-on utilisé que l'image de f était positive (pour des valeurs positives) ? On avait déduit la monotonie des solutions ! Dans notre cas, on sait que $f(x + y) \geq f(x) + f(y) > f(x)$ et donc on peut déduire que f est strictement croissante. Jusqu'ici tout était standard. On passe à présent à la partie technique pour étendre nos déductions de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Q}_{>0}$. Fixons $x \in \mathbb{Q}_{>0}$. L'idée est d'introduire la partie entière $\lfloor x \rfloor$ de x :

$$f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1,$$

où nous avons utilisé que $x \geq \lfloor x \rfloor > x - 1$. On a donc établi que $f(x) > x - 1$. Ce n'est pas ce que l'on souhaitait et la relation parait trop large pour être utile. Pourtant, dans ce contexte, on peut l'utiliser de manière décisive. Par induction, l'inégalité de départ nous dit que $f(x)^k \geq f(x^k)$. Ainsi

$$f(x) \geq \sqrt[k]{f(x^k)} > \sqrt[k]{x^k - 1}.$$

Or, pour $x > 1$, $\sqrt[k]{x^k - 1} = x\sqrt[k]{1 - x^{-k}}$ converge vers x lorsque $k \to \infty$. Ainsi, on doit avoir $f(x) \geq x$ pour tout $x \geq 1$. Voilà l'argument du type analyse auquel on s'attend dans ce genre de problème.

Le plus dur est maintenant derrière. Que dire s'il existait $x_0 \geq 1$ tel que $f(x_0) > x_0$? La deuxième inégalité nous donne

$$f(x_0 + y) > x_0 + f(y) \geq x_0 + y.$$

C'est-à-dire, $f(x) > x$ pour tout $x \geq x_0$. En particulier, on doit avoir $x_0 > a > 1$, car $f(a) = a$. En partant du point fixe a, peut-on construire d'autres points fixes de f ? On sait que

$$a^2 = a \cdot a = f(a) \cdot f(a) \geq f(a^2) \geq a^2.$$

On déduit que $f(a^2) = a^2$ et par induction, $f(a^k) = a^k$. Comme $a > 1$, les a^k deviennent arbitrairement grands. Donc il existe k tel que $x_0 \leq a^k$. C'est une contradiction. On conclut que l'on a bien $f(x) = x$ pour $x \geq 1$.

Qu'en est-il des valeurs $x < 1$? Fixons $x < 1$. On sait que $1/x > 1$. Donc

$$f(x) \cdot 1/x = f(x)f(1/x) \geq f(1) = 1$$

et par conséquent $f(x) \geq x$. De plus, il existe un entier k tel que $kx > 1$, ce qui donne

$$kx = f(kx) \geq kf(x)$$

et ainsi $f(x) \leq x$. Finalement on a bien $f(x) = x$ et on conclut que l'identité est bien l'unique solution. $\square$