Ungleichungen I - Aufgaben

Aktualisiert: 29. März 2019
vers. 2.0.0

Bemerkung: Bei allen Aufgaben dieses Aufgabenblatts sollten auch die Gleichheitsfälle gefunden werden. Für manche Aufgaben gibt es Hinweise, wobei es sich meist eher um eine allgemeine Bemerkung handelt als um einen Tipp.

2 Die Macht der Quadrate

Die Aufgaben dieses Abschnitts gehören zum zweiten Kapitel des Skripts. Die einfachen Aufgaben lassen sich meist mit AM-GM, Cauchy oder einer Umformung zu Quadraten lösen (oder man zerstört die Aufgabe mit Muirhead). Es ist aber selten, dass eine Aufgabe nur einen einzigen Lösungsweg hat. Für die schwereren Aufgaben kann Muirhead die einfachste Lösung sein, Hölder kommt auch vor.

Einstieg

2.1 Seien a, b, c, d nichtnegative reelle Zahlen. Zeige mithilfe dreier verschiedener Methoden, dass

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

2.2 Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Zeige mithilfe dreier verschiedener Methoden, dass

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2.3 Seien x, y reelle Zahlen. Dann gilt

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \geq \max\{x+y; x-y; 1+xy; 1-xy\}.$$

Hinweis: Überlegt euch zuerst, was es bedeutet, dass ein Ausdruck grösser als das Maximum mehrerer anderer Asudrücke ist.

2.4 In dieser Aufgabe verstärken wir ein gut bekanntes Resultat aus dem Skript. Seien x, y, z reelle Zahlen. Dann gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4} \cdot (x-y)^2.$$

2.5 Seien a, b positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a}{a^4+b^2} + \frac{b}{a^2+b^4} \leq \frac{1}{ab}.$$

2.6 Seien a, b positive reelle Zahlen und $m \geq 1$ eine ganze Zahl. Dann gilt

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

2.7 Seien $a_1, \ldots, a_{13}$ positive reelle Zahlen, sodass $a_1 + \ldots + a_{13} = 1$. Finde die kleinstmögliche Zahl, die der Ausdruck

$$\frac{1}{a_1} + \frac{9}{a_2} + \ldots + \frac{625}{a_{13}}$$

annehmen kann. Verallgemeinere dann die Aufgabe, sodass eine beliebige ganze Zahl n an der Stelle von 13 steht.

2.8 Seien x, y, z, w reelle Zahlen. Dann gilt

$$\min\{x - y^2; y - z^2; z - w^2; w - x^2\} \leq \frac{1}{4}.$$

Hinweis: Überlegt euch zuerst, was es bedeutet, dass ein Ausdruck grösser als das Minimum mehrerer anderer Ausdrücke ist.

2.9 Neben AM-GM und AM-HM gibt es weitere Ungleichungen zwischen den verschiedenen Mitteln, welche dann euer Repertoire vervollständigen. Erinnern wir uns zuerst an die Definitionen. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann definieren wir

- HM (harmonisches Mittel): $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$,
- GM (geometrisches Mittel): $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$,
- AM (arithmetisches Mittel): $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$,
- QM (quadratisches Mittel): $\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$.

Die Ungleichungen AM$\geq$ GM und AM$\geq$ HM haben wir bereits gesehen.

Theorem 2.1 (Ungleichungen zwischen den Mitteln)**.** *Es gilt*

$$\min\{a_i\} \leq HM \leq GM \leq AM \leq QM \leq \max\{a_i\}.$$

Bestimme für jede Ungleichung die Gleichheitsfälle

2.10 (Finalrunde 2014) Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen sodass $a + b + c = 1$. Dann gilt

$$\frac{3-b}{a+1} + \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} \geq 4.$$

Fortgeschritten

2.11 Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

2.12 Seien $a, b, c \geq 1$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left(a^2\right)^{bc}\left(b^2\right)^{ca}\left(c^2\right)^{ab} \leq (bc)^{a^2}(ca)^{b^2}(ab)^{c^2}.$$

2.13 Finde unter allen Rechtecken mit Fläche A diejenigen Rechtecke, welche den grössten Umfang haben.

2.14 Sei P ein Polynom mit nichtnegativen reellen Koeffizienten. Angenommen es gilt $P(1) \geq 1$. Dann gilt für alle $x > 0$, dass

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}.$$

2.15 Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

2.16 Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $a + b + c = 1$. Dann gilt

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1.$$

2.17 Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \max\left\{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\right\}.$$

Hinweis: Wenn eine homogene Ungleichung auf Grund einer einzigen Variablen nicht symmetrisch ist, kann es nützlich sein, die Homogenität aufzugeben, um dafür Symmetrie zu erhalten.

2.18 Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach, aber die Hauptidee der Lösung taucht immer wieder auf. Sie erinnert an das Beispiel von der IMO 2012 aus dem Skript. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen sodass $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Finde den kleinsten Wert, den der folgende Ausdruck annehmen kann:

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_n}.$$

2.19 (Finalrunde 2016) Seien a, b, c die Längen der Seiten eines Dreiecks (falls ihr diese Nebenbedingung noch nicht kennt, könnt ihr diese Aufgabe erstmal beiseite lassen). Dann gilt

$$\frac{ab+1}{a^2+ac+1} + \frac{bc+1}{b^2+ba+1} + \frac{ca+1}{c^2+cb+1} > \frac{3}{2}.$$

Hinweis: Eine Summe von drei Brüchen soll grösser als $3/2$ sein? Mmmh.

2.20 Seien $a \geq b \geq c$ positive reelle Zahln. Dann gilt

$$ab^4 + bc^4 + ca^4 \leq ba^4 + cb^4 + ac^4.$$

Olympiade

2.21 (Polen 1995) Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen sodass

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = n.$$

Finde den kleinsten Wert, den der folgende Ausdruck annehmen kann:

$$a_1 + \frac{a_2^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^n}{n}.$$

2.22 (Finalrunde 2018) Seien a, b, c, d, e positive reelle Zahlen. Finde den kleinsten Wert, den der folgende Ausdruck annehmen kann:

$$\frac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + 2c^2 + d^2 + 2e^2}.$$

2.23 Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

2.24 Seien $n \geq 1$ eine ganze Zahl und $a_1, \ldots, a_{n+1}$ positive reelle Zahlen sodass $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 1$. Dann gilt

$$n^{a_1} + \ldots + n^{a_{n+1}} \geq \sqrt[\sqrt[n]{a_1}]{n} + \ldots + \sqrt[\sqrt[n]{a_{n+1}}]{n}.$$

2.25 (USA TST 2010) Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $abc = 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

2.26 (Finalrunde 2012) Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $abc = 1$. Dann gilt

$$1 + ab + bc + ca \geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab}; \frac{(b+c)^2}{bc}; \frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

2.27 (Shortlist 2004) Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $ab + bc + ca = 1$. Dann gilt

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

3 Ordnung anstatt Unordnung

In diesem Abschnitt treffen wir Ungleichungen an, welche sich mit geordneten Folgen, Tchebychev oder Schur lösen lassen. Wieder gibt es meist mehr als eine Lösung pro Aufgabe.

Einstieg

3.1 Findet die Gleichheitsfälle der Ungleichung von Schur mithilfe des Beweises aus dem Skript.

3.2 Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt

1. $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$,
2. $a^7 + b^7 + c^7 \geq a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3$,
3. $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.

In welchen Fällen können wir auch Muirhead benutzen?

3.3 Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen. Finde den kleinsten Wert, den der folgende Ausdruck annehmen kann:

$$a^{(a-b)}b^{(b-c)}c^{(c-d)}d^{(d-a)}.$$

3.4 Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen und sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Permutation der a_i. Dann gilt

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq a_1 + \ldots + a_n.$$

3.5 Seien x, y, z, w reelle Zahlen, wobei nicht alle vier gleich 0 sind. Dann gilt

$$\frac{(x+y+z+w)^2}{x^2+y^2+z^2+w^2} \leq 4.$$

3.6 Beweise HM $\leq$ AM $\leq$ QM mithilfe der Ungleichung von Tchebychev. Was können wir mit diesem neuen Beweis im Bezug auf die Vorzeichen der Variablen in den Ungleichungen aussagen (im Vergleich zu vorher)?

Fortgeschritten

3.7 Wir betrachten eine Verallgemeinerung von QM-AM. Seien $k \geq 1$ eine ganze Zahle und $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ist es notwendig, dass die a_i positiv sind?

3.8 Seien $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f \geq 0$ positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$(a+b)(c+d)(e+f) \leq 4(ace + bdf) \leq (a+f)(b+e)(c+d).$$

Verallgemeinert eure Methode für die Lösungen dieser und der letzten Aufgabe.

3.9 (IMO 1975) Seien $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ und $y_1 \geq \ldots \geq y_n$ reelle Zahlen. Sei $z_1, \ldots, z_n$ eine Permutation der y_i. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

3.10 Seien a, b, c die Längen der Seiten eines Dreiecks. Dann gilt

$$2a^2(b+c) + 2b^2(c+a) + 2c^2(a+b) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 9abc.$$

3.11 Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

Wenn man den Koeffizienten 2/3 auf die linke Seite bringt, kann man diese Aufgabe als Komplement zur Ungleichung von Nesbitt sehen, denn sie gibt uns eine Abschätzung nach oben für die Summe von Brüchen.

Olympiade

3.12 Seien $a_n \geq \ldots \geq a_1 > 0$ positive reelle Zahlen sodass

$$\frac{1}{1+a_1} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} = 1.$$

Dann gilt

$$\sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n} \geq (n-1) \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right).$$

3.13 Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 2.$$

3.14 (IMO Selektion 2012) Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $abc \geq 1$. Dann gilt

$$\frac{a^4-1}{ab^3+abc+ac^3} + \frac{b^4-1}{bc^3+abc+ba^3} + \frac{c^4-1}{ca^3+abc+cb^3} \geq 0.$$

3.15 (IMO Selektion 2010) Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen. Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{a^2-bd}{b+2c+d} + \frac{b^2-ca}{c+2d+a} + \frac{c^2-db}{d+2a+b} + \frac{d^2-ac}{a+2b+c} = 0.$$

Diese Aufgabe ist kompliziert und nicht gerade einfach. Dafür enthält der Lösungsweg eine nützliche Idee für den Umgang mit zyklisch symmetrischen Ungleichungen in vier Variablen.

4 Konvex oder konkav

Hier geht es um Aufgaben mit analytischem Geschmack. Dabei sind meist Jensen oder der Tangent line trick nötig.

Einstieg

4.1 Zeige mithilfe der Methoden des ersten Kapitels die Ungleichung von Bernoulli im Fall, dass $r = 1/n$ der Kehrwert einer ganzen Zahl ist.

4.2 Seien a, b, c drei positive reelle Zahlen. Zeige mit Jensen, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

gilt. Wie könnte man diese Ungleichungen mit den Methoden frührerer Kapitel beweisen?

4.3 Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $a + b + c = 1$. Dann gilt

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Was passiert, wenn die Nebenbedingung durch $a + b + c \geq 1$ ersetzt wird?

Fortgeschritten

4.4 Seien α, β, γ die Winkel eines Dreiecks. Dann gilt

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Für welche Dreiecke gilt Gleichheit? Was können wir über die analoge Summe mit Sinus sagen?

4.5 Seien $0 < a_1, \ldots, a_n \leq 2$ positive reelle Zahlen. Sei A das arithmetische Mittel der a_i. Dann gilt

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(A + \frac{1}{A}\right)^n.$$

4.6 Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c = 3$. Zeige mithilfe von Jensen, dass

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Olympiade

4.7 Seien $a \geq b \geq 1$ zwei reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{a+1}} \geq \frac{b}{\sqrt{a+b}} + \frac{a}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}}.$$

(Eine coole Ungleichung, welche weder homogen noch symmetrisch ist!)

4.8 (Shortlist 2017) Seien $a_1, a_2, \ldots a_n, k$ und M natürliche Zahlen, sodass

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{und} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = M.$$

Zeige, dass

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

keine positiven Nullstellen hat falls $M > 1$.

4.9 (IMO Selektion 2008) Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a}{\sqrt{3a+2b+c}} + \frac{b}{\sqrt{3b+2c+a}} + \frac{c}{\sqrt{3c+2a+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a+b+c}.$$