

Aufgaben Induktion

Aktualisiert: 26. Januar 2020
vers. 3.1.0

1 Aufgaben

Einstieg

1.1 Zeige, dass $n^2 + n$ für alle natürlichen Zahlen n gerade ist.

1.2 Sei $n \geq 3$. Zeige, dass die Innenwinkelsumme in einem n -Eck $(n - 2) \cdot 180$ Grad beträgt.

1.3 Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(b) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

(c) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n! - 1}{n!}$

(e) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

1.4 Bestimme alle natürlichen Zahlen n , sodass $3^n > n!$ gilt.

1.5 Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

1.6 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar ist.

Fortgeschritten

1.7 Zeige, dass jede natürliche Zahl als Summe von verschiedenen Zweierpotenzen darstellbar ist.

1.8 Zeige: Die Zahlen 1007, 10017, 100117, 1001117, ... sind alle durch 53 teilbar.

1.9 n Geraden unterteilen die Ebene in verschiedene Gebiete. Ein Gebiet ist ein Flächenstück, durch das im Inneren keine Gerade geht. Zeige, dass es höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ verschiedene Gebiete gibt.

- 1.10 **Vorrunde 2016, 2.** Quirin hat n Klötze mit den Höhen 1 bis n und möchte diese so nebeneinander aufstellen, dass sich seine Katze von links nach rechts über sie hinwegbewegen kann. Die Katze kann dabei jeweils auf den nächsten Klotz springen, falls dieser tiefer oder um 1 höher ist. Zu Beginn wird die Katze auf den Klotz am linken Ende gesetzt. Wie viele Möglichkeiten hat Quirin, die Klötze in einer solchen Reihe aufzustellen?
Bemerkung: Für $n = 5$ ist $3 - 4 - 5 - 1 - 2$ eine Möglichkeit, $1 - 3 - 4 - 5 - 2$ jedoch nicht.
- 1.11 n Punkte in der Ebene sind entweder blau oder rot gefärbt. Wir verbinden alle roten mit allen blauen Punkten. Zeige, dass wir nicht mehr als $\frac{n^2+n-2}{4}$ Verbindungen haben können.
- 1.12 Wieviele Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ gibt es, die keine 2 aufeinanderfolgenden Elemente enthalten?
- 1.13 Sei $n \geq 2$. In einem Restaurant sitzen n Personen in einer Reihe. Es gibt 3 Menüs zur Wahl. Keine der Personen möchte das gleiche essen wie die Nachbarn links und rechts. Auf wieviele Arten können die Leute ihr Essen bestellen?
- 1.14 Wir haben n verschieden grosse Bücher und drei verschiedene Platten, auf denen die Bücher liegen können. Am Anfang sind alle Bücher der Grösse nach geordnet (das kleinste Buch zuoberst) auf Platte 1. In einem Zug dürfen wir das oberste Buch einer Platte auf eine andere Platte legen. Es darf dabei jedoch nie ein grösseres Buch auf einem kleineren zu liegen kommen. Wie viele Züge werden mindestens benötigt, um alle Bücher auf Platte 3 zu bringen?

Olympiade

- 1.15 Sei $n \geq 6$. Zeige, dass wir ein Quadrat in n quadratische Teile zerschneiden können.
- 1.16 Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte ein $2^n \times 2^n$ -Schachbrett, aus dem ein beliebiges Feld entfernt wurde. Zeige, dass es möglich ist, dieses mit L-Triominos zu bedecken.
- 1.17 Auf einer runden Rennstrecke stehen n identische Autos. Zusammen haben sie genau soviel Benzin, wie ein einziges Auto benötigt, um eine ganze Runde fahren zu können. Ein Auto fährt los, während alle anderen stehen bleiben. Kommt es an einem stehenden Auto vorbei, dann übernimmt es das Benzin aus dem Tank des stehenden Autos. Zeige, dass es ein Auto gibt, das die ganze Runde fahren kann, ohne dass ihm das Benzin ausgeht.
- 1.18 In einer Schüssel liegen $n \geq 2$ Bonbons. Alice und Bob spielen das folgende Spiel: In einem Zug darf man eine positive Anzahl Bonbons aus der Schüssel nehmen, aber nicht mehr als die Hälfte aller Bonbons. Alice und Bob machen abwechselungsweise Züge und Alice beginnt. Wer in seinem Zug ein einzelnes Bonbon übrig lässt, verliert. Für welche n hat Bob eine Gewinnstrategie?

2 Weitere Aufgaben

2.1 (*Geometrische Reihe*) Für $q \neq 1$ und jede ganze Zahl $n \geq 0$ gilt

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

2.2 Zeige, dass für alle n gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

2.3 Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

2.4 Die Summe aller weder durch 2 noch durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen $< 10n$ beträgt $20n^2$.

2.5 Die Folge a_n ist definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Zeige, dass die Folge monoton steigend und beschränkt ist.

2.6 Für $n \geq 1$ und $0 \leq x_k \leq 1$ ($1 \leq k \leq n$) gilt

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

Wann steht das Gleichheitszeichen?

2.7 (*Fibonacci Folge*) Die Fibonacci Folge ist rekursiv definiert durch

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

(a) Es gilt die Formel von BINET:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

(b) $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$

(c) $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

(d) $\text{ggT}(F_n, F_{n+1}) = 1$ für alle $n \geq 0$.

(e) Sei a_n die Anzahl Wörter der Länge n aus dem Alphabet $\{0, 1\}$, die keine zwei Einsen mit Abstand 2 enthalten. Finde eine Formel für a_n mit Hilfe der Fibonacci Zahlen.

2.8 Im Raum sind $2n$ Punkte gegeben. Zwischen mindestens $n^2 + 1$ Punktepaaren ist die Verbindungsstrecke der beiden Punkte gezeichnet. Zeige, dass es drei Punkte gibt, die alle miteinander verbunden sind.

2.9 Zeige:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

2.10 In der Ebene sind $n > 2$ Geraden gezeichnet, sodass keine zwei parallel sind und keine drei einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Diese zerlegen die Ebene in verschiedene Gebiete. Zeige, dass man jedem Gebiet eine ganze Zahl $\neq 0$ mit Betrag $\leq n$ zuordnen kann, sodass die Summe der Zahlen auf beiden Seiten von jeder Geraden gleich 0 ist.

2.11 Für jede natürliche Zahl N gilt

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < 3.$$

2.12 Betrachte alle nichtleeren Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ die keine zwei benachbarten Zahlen enthalten. Bilde für jede dieser Teilmengen das Produkt der Elemente. Zeige, dass die Summe der Quadrate all dieser Zahlen gleich $(n+1)! - 1$ ist. (Zum Beispiel für $n = 3$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + (1 \cdot 3)^2 = 23 = 4! - 1$.)

2.13 Sei $a \neq 0$ eine reelle Zahl, sodass $a + 1/a \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass

$$a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2.14 Sei $n = 2^k$. Zeige, dass man aus $(2n - 1)$ ganzen Zahlen stets n auswählen kann, sodass ihre Summe durch n teilbar ist.

2.15 Seien x_1, x_2, \dots, x_n und y_1, y_2, \dots, y_m natürliche Zahlen, $m, n \geq 2$, sodass die Summen $x_1 + \dots + x_n$ und $y_1 + \dots + y_m$ gleich und kleiner als mn sind. Zeige, dass man aus der Gleichung $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_m$ einige (nicht alle) Zahlen wegstreichen kann, sodass man wieder eine Gleichung erhält.

2.16 Zeige, dass jede Triangulation eines simplen Polygons 3-färbbar ist.

2.17 (IMO 2018, C1) In Lineland there are n towns, arranged along a road running from left to right. Each town has a left bulldozer (put to the left of the town and facing left) and a right bulldozer (put to the right of the town and facing right). The sizes of the $2n$ bulldozers are distinct. Every time when a right and a left bulldozer confront each other, the larger bulldozer pushes the smaller one off the road. On the other hand, the bulldozers are quite unprotected at their rears; so, if a bulldozer reaches the rear-end of another one, the first one pushes the second one off the road, regardless of their sizes. Let A and B be two towns, with B being to the right of A . We say that town A can sweep town B away if the right bulldozer of A can move over to B pushing off all bulldozers it meets. Similarly, B can sweep A away if the left bulldozer of B can move to A pushing off all bulldozers of all towns on its way. Prove that there is exactly one town which cannot be swept away by any other one.

2.18 Prove AM-GM.