

Combinatoire - Exercices

Actualisé: 6 février 2017
vers. 1.2.0

1 Dénombrement

Mise en jambes

- 1.1 Combien existe-t-il de nombres positifs à 4 chiffres avec :
- tous les chiffres égaux ?
 - son premier chiffre impair ?
 - son premier chiffre pair ?
 - tous les chiffres différents ?
 - jamais deux chiffres consécutifs égaux ?
- 1.2 De combien de manières peut-on répartir 10 personnes en deux équipes de basket-ball ayant chacune 5 membres ?
- 1.3 De combien de manières peut-on composer un bouquet de 12 fleurs avec trois sortes différentes de roses ?
- 1.4 Combien de mots différents peut-on former en permutant les lettres des mots suivants ?
- vélos
 - papier
 - banane
 - minimum
- 1.5 Quatre joueurs A, B, C, D reçoivent chacun une main de treize cartes (d'un jeu de 52 cartes). Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

Avancé

- 1.6 Une société constituée de 12 membres fait une excursion en bateau et doit pour cela se répartir sur trois bateaux. Les bateaux peuvent transporter respectivement 5, 4 et 3 personnes. De combien de manières les personnes peuvent-elles se répartir sur les bateaux ?

Combien de possibilités reste-t-il, si on suppose que parmi les 12 personnes il y a un couple qui aimerait rester ensemble ?

1.7 Combien de nombres à quatre chiffres existe-t-il avec :

- a) exactement trois chiffres différents ?
- b) au moins deux chiffres égaux ?
- c) deux chiffres pairs et deux chiffres impairs ?

2 Autres exercices

Mise en jambes

2.1 Soient $k \leq n$ deux nombres naturels. De combien de manières peut-on distribuer k balles différentes à n enfants de telle sorte que chaque enfant ait au plus une balle ?

2.2 2 droites parallèles sont données. On choisit 10 points sur la première et 11 sur la deuxième. Combien de

- a) quadrilatères
- b) triangles

existe-t-il avec des sommets parmi les points choisis ?

2.3 Combien de nombres entiers positifs plus petits que 2014 sont-ils divisibles par 3 ou 4 mais pas par 5 ?

2.4 Combien de nombres à six chiffres existe-t-il qui vérifient la condition suivante :
Chaque chiffre est strictement plus petit que le chiffre de gauche ?

Avancé

2.5 n personnes sont assises autour d'une table ronde. Deux placements sont considérés identiques si chaque personne a les deux mêmes voisins. Combien de placements différents existe-t-il ?

2.6 De combien de manières peut-on placer 8 tours indistinguables sur un échiquier de manière à ce qu'il n'y ait pas deux tours qui se menacent ?

2.7 Combien y a-t-il de solutions entières à l'équation $x + y + z + w = 100$ si $x, y, z, w \geq 8$?

2.8 Un billet de lotto consiste en un sous-ensemble à 6 éléments de $\{1, 2, \dots, 45\}$. Combien de billets existe-t-il et parmi ceux-ci combien contiennent deux nombres consécutifs ?

- 2.9 Une araignée a une chaussette et une chaussure pour chacune de ses huit jambes. De combien de manières peut-elle les enfiler, si pour chaque jambe elle doit enfiler la chaussette avant la chaussure ?

Olympiade

- 2.10 De combien de manières peut-on choisir deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble à n éléments, si l'ordre n'a pas d'importance ? (Attention : l'ensemble vide est aussi un sous-ensemble.)
- 2.11 Combien de sous-ensembles d'un ensemble de n éléments peut-on choisir de telle sorte qu'ils aient un nombre pair d'éléments ?
- 2.12 Dans une langue, il y a n lettres. Une suite de lettres est un mot si et seulement si entre deux mêmes lettres il n'y a jamais deux lettres identiques.
- Quelle est la longueur maximale d'un mot ?
 - Combien de mots de longueur maximale y a-t-il ?

3 Exercices d'olympiades passées

Les anciens exercices d'examens sont très appropriés pour la préparation ; d'une part ils représentent naturellement le niveau de l'examen, et d'autre part toutes les solutions des exercices peuvent être trouvées sur www.imosuisse.ch. Cependant il faudrait toujours travailler par soi-même sur l'exercice avant de regarder sa solution.

- Tour préliminaire 2008, 2.** Un *chemin* dans le plan va du point $(0,0)$ au point $(6,6)$, et à chaque pas on peut se déplacer d'une case soit à droite soit en haut. Combien existe-t-il de chemin, qui ne contiennent ni le point $(2,2)$ ni le point $(4,4)$?
- Tour préliminaire 2009, 2.** Soient n enfants, qui sont tous de taille différente. Combien y a-t-il de possibilités d'aligner ces enfants de telle manière que tous sauf le plus grand aient un voisin plus grand que lui ?
- Tour préliminaire 2010, 3.** De combien de manières peut on attribuer à chacun des coins d'un dé un des nombres $1, 2, 3, \dots, 10$, de telle manière que chaque nombre soit utilisé au plus une fois, et pour chaque face la somme des nombres sur les quatre coins soit impair ?
- Tour préliminaire 2011, 4.** Soit une ligne de bus circulaire disposant de $n \geq 2$ arrêts, qui peuvent être atteints par les deux directions. Les tracés entre deux arrêts voisins sont appelés tronçons. Un des arrêts s'appelle Genève. Un bus doit commencer à Genève, puis passer par exactement $n + 2$ tronçons et se retrouver à Genève à la fin. Il doit s'arrêter à chaque arrêt au moins une fois, et il peut revenir en arrière à chaque arrêt. Quel est le nombre de trajets possibles ?

5. **Tour préliminaire 2012, 2.** On dispose de $6n$ jetons coloriés en $2n$ couleurs, de telle manière que chaque couleur apparaisse sur exactement 3 jetons. On veut répartir ces jetons en deux piles A et B de telle sorte que chaque pile contienne le même nombre de jetons et aucune des deux piles ne contienne trois jetons de même couleur. De combien de manière peut-on procéder si

- a) l'ordre des jetons à l'intérieur de la pile ne joue aucun rôle ?
- b) l'ordre est important ?

6. **Tour préliminaire 2013, 3.** Un nombre naturel est appelé sympathique, si les chiffres de sa représentation décimale vérifient les conditions suivantes :

- a) Chacun des chiffres $0, 1, \dots, 9$ apparaît au plus une fois.
- b) Si A est un chiffre pair et B un chiffre impair, il y a exactement $\frac{A+B-1}{2}$ autres chiffres entre A et B .

Trouver le nombre de nombres sympathiques.

7. **Tour préliminaire 2014, 3.** Combien existe-t-il de nombres naturels à 8 chiffres pour lesquels chaque chiffre est soit strictement plus grand que tous les chiffres à sa gauche, soit strictement plus petit ?

Exemple : 45326791