

# Anordnen und Extremalprinzip

Aktualisiert: 1. Januar 2019  
vers. 1.1.0

1. In einem Gebiet befinden sich  $n$  Häuser und  $n$  Brunnen. Jedes Haus soll mit einer geradlinigen Wasserleitung mit einem Brunnen verbunden werden, sodass keine zwei Häuser mit dem gleichen Brunnen verbunden sind. Zeige, dass dies stets möglich ist, ohne dass zwei Wasserleitungen sich kreuzen.

Minimal Gesamtlänge \*\*

2. Jeder Gitterpunkt in der Ebene ist mit einer natürlichen Zahl beschriftet, sodass die Zahl an jedem Gitterpunkt gleich dem Durchschnitt der 4 Zahlen an den benachbarten Punkten ist. Zeige, dass alle Zahlen gleich sind.

Kleinste Zahl \*

3. In der Ebene liegen  $2n + 2$  Punkte, sodass keine drei kollinear sind. Zeige, dass zwei dieser Punkte eine Gerade bestimmen, welche die übrigen Punkte in zwei gleichgrosse Gruppen zerlegen.

Punkt auf der Konvexen Hülle / Sweepline \*

4. Ein Würfel lässt sich nicht in paarweise verschieden grosse kleinere Würfel zerlegen.

Kleinstes Quadrat auf der Grundfläche \*\*

5. In der Ebene sind  $n$  Punkte gegeben. Je drei dieser Punkte bilden ein Dreieck mit Flächeninhalt  $\leq 1$ . Zeige, dass alle Punkte in einem Dreieck mit Flächeninhalt  $\leq 4$  liegen.

Grösstes Dreieck (Fläche) \*\*

6. 10 Zahlen liegen im offenen Intervall  $]1, 55[$ . Zeige, dass drei dieser Zahlen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.

Nehme kleinste beiden Zahlen ( $\Rightarrow$  Fibonacci) \*\*

7. An 33 Leute wurden 160 Geschenke verteilt. Zeige, dass mindestens 4 Leute gleichviele Geschenke bekommen haben.

Minimale Anzahl Geschenke, sodass keine 4 gleichviele Geschenke haben. \*

8. In der Ebene sind  $n > 2$  Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind. Durch jeden Schnittpunkt von zwei Geraden geht mindestens noch eine weitere. Zeige, dass alle Geraden durch einen Punkt gehen.

Kleinstes Dreieck \*\*\*

(Lemma: Wenn wir ein Dreieck in vier kleinere zerteilen, mit Punkten die nicht alle auf dem Mittelpunkt liegen, dann ist eines der kleineren Dreiecke im Ecken immer kleiner als das in der Mitte. Beweis: betrachte die Mittelpunkte der Seiten und mach eine Fallunterscheidung, ob zwei Punkte im gleichen Dreieck liegen. Falls ja, verschieben den dritten Punkt auf den richtigen Eckpunkt des Dreiecks und vergleiche dann die Fläche. Falls keine zwei Punkte im gleichen Dreieck liegen, verschieben alle Punkte auf die Mittelpunkte und vergleiche Flächen.)

9. In einem Turnier spielt jeder Teilnehmer genau einmal gegen jeden anderen. Es gibt keine Unentschieden. Nach dem Turnier macht jeder Spieler eine Liste mit den Namen aller Teilnehmer, die er besiegt hat und den Namen aller, die gegen einen von ihm besiegteten Spieler verloren haben. Zeige, dass mindestens ein Teilnehmer die Namen aller anderen Spieler auf seiner Liste hat.

Spieler mit den meisten Siegen betrachten. \*\*

10. (Sylvester) Falls  $n > 2$  Punkte in der Ebene nicht alle auf einer Geraden liegen, dann gibt es eine Geraden, die durch genau zwei der Punkte geht.

Kleinster Punkt-Linien Abstand \*\*\*

11. Sei  $M$  eine Menge von Punkten in der Ebene. Für je zwei Punkte aus  $M$  liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte wieder in  $M$ . Zeige, dass  $M$  unendlich viele Punkte enthält.

Kleinster Abstand \*

12.  $2n + 1$  reelle Zahlen haben die Eigenschaft, dass die Summe von je  $n$  dieser Zahlen kleiner ist, als die Summe der restlichen  $n + 1$ . Zeige, dass diese Zahlen alle positiv sind.

Grösstes Summe \*

13. Von  $2n + 3$  Punkten in der Ebene seien keine drei kollinear und keine vier liegen auf einem Kreis. Zeige, dass es einen Kreis durch drei dieser Punkte gibt, in dessen Innern genau  $n$  der übrigen Punkte liegen.

Zwei benachbarte Punkte auf der konvexen Hülle \*\*

14. In einem Land gibt es  $n$  Städte. Je zwei davon sind durch genau eine Einbahnstrasse verbunden. Zeige, dass es eine Stadt gibt, von der aus man jede andere Stadt entweder direkt oder über höchstens eine andere Stadt erreichen kann.

Gleiche Aufgabe wie Turnier.

15. Gegeben sind  $4n$  Punkte in der Ebene, keine drei kollinear. Zeige, dass man  $n$  (nicht unbedingt konvexe) Vierecke mit diesen Punkten als Eckpunkten finden kann, die alle disjunkt sind.

Sweepingline \*\*

16. Jedes konvexe Polygon mit Fläche 1 ist enthalten in einem Rechteck mit Fläche 2.

Längste Distanz im Polygon \*\*\*

17. 69 verschiedene positive ganze Zahlen seien alle  $\leq 100$ . Zeige, dass man vier dieser Zahlen  $a, b, c, d$  auswählen kann mit  $a + b + c = d$ . Gilt dies auch für 68 Zahlen?
18. In jedem konvexen  $n$ -Eck gibt es drei aufeinanderfolgende Ecken  $A, B, C$ , sodass der Umkreis des Dreiecks  $ABC$  das ganze  $n$ -Eck enthält.
- Grösster Kreis (schönere Lösung?) \*\*
19. Eine endliche Zahl von Polygonen habe die Eigenschaft, dass je zwei dieser Polygone einen gemeinsamen Punkt haben. Zeige, dass eine Gerade existiert, die jedes Polygon schneidet.
20. Sechs verschieden grosse Kreise verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt. Zeige, dass das Zentrum des einen Kreises im Innern eines anderen liegt.
21. (IMO 03) Sei  $A$  eine 101-elementige Teilmenge von  $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ . Beweise, dass es Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  aus  $S$  gibt, sodass die Mengen

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad j = 1, 2, \dots, 100$$

- paarweise disjunkt sind.
22. In der Ebene sind  $n$  Punkte gegeben. Zeige, dass man drei der Punkte auswählen kann, sodass der Kreis durch diese Punkte keinen der anderen Punkte im Innern enthält.
23. (IMO 71) Offenbar dominieren  $n$  Türme ein  $n \times n$ -Schachbrett. Was ist aber die kleinste Zahl Türme, die ein  $n \times n \times n$ -Schachwürfel dominieren kann?
24. (Ungarn 73)  $n \geq 5$  Ebenen in allgemeiner Lage zerlegen den Raum in Gebiete. Zeige, dass mindestens  $(2n - 3)/4$  dieser Gebiete Tetraeder sind.