

Zahlentheorie I - Lösungen

Aktualisiert: 10. November 2018

vers. 1.3.0

1 Teilbarkeit

Einstieg

1.1 Zeige, dass 900 ein Teiler von $10!$ ist.

Lösung: Es gilt

$$900 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10 \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$$

1.2 Das Produkt zweier Zahlen, von denen keine durch 10 teilbar ist, beträgt 1000. Bestimme die Summe dieser Zahlen.

Lösung: Wir bezeichnen die beiden Zahlen mit a und b . Die Primfaktorzerlegung von 1000 ist $1000 = 2^3 5^3$. Daraus folgt, dass

$$a = 2^k 5^l \text{ und } b = 2^{3-k} 5^{3-l}$$

für zwei natürliche Zahlen $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Wenn nun beide der Zahlen k und l strikt grösser als 0 sind, dann ist a durch 10 teilbar, was ein Widerspruch ist. Wenn andererseits k und l beide strikt kleiner als 3 sind, dann ist b durch 10 teilbar, was auch nicht sein kann. Somit gilt, dass (k, l) entweder $(3, 0)$ oder $(0, 3)$ ist. Im ersten Fall gilt $a = 8$ und $b = 125$, im zweiten Fall gilt $a = 125$ und $b = 8$. In beiden Fällen erhalten wir also $a + b = 133$.

1.3 Finde alle natürlichen Zahlen n , sodass n ein Teiler von $n^2 + 3n + 27$ ist.

Lösung: Da n die ersten beiden Summanden von $n^2 + 3n + 27$ teilt, gilt

$$n \mid n^2 + 3n + 27 \Leftrightarrow n \mid 27.$$

Da $27 = 3^3$ ist die zweite Bedingung genau dann erfüllt, wenn $n \in \{1, 3, 9, 27\}$. Somit ist n genau dann ein Teiler von $n^2 + 3n + 27$, wenn $n \in \{1, 3, 9, 27\}$.

Fortgeschritten

1.4 Zeige:

(a) $5 \cdot 17 \mid 5^2 \cdot 17 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 8$

(b) $n(n+m) \mid 3mn^2 + amn^2 + 3n^3 + an^3$

Lösung:

(a) Die rechte Seite kann wie folgt umgeformt werden:

$$5^2 \cdot 17 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 8 = 5^2 \cdot 17 + 5 \cdot 3(9 + 8) = 5^2 \cdot 17 + 5 \cdot 3 \cdot 17 = 5 \cdot 17(5 + 3)$$

Der letzte Ausdruck ist natürlich durch $5 \cdot 17$ teilbar.

(b) Wiederum formen wir die rechte Seite um:

$$\begin{aligned} 3mn^2 + amn^2 + 3n^3 + an^3 &= n^2(3m + am + 3n + an) \\ &= n^2((3 + a)m + (3 + a)n) \\ &= (3 + a)n^2(m + n) \\ &= n(n + m)((3 + a)n). \end{aligned}$$

Auch hier sieht man sofort, dass der letzte Ausdruck durch $n(n + m)$ teilbar ist.

1.5 Bestimme drei dreistellige natürliche Zahlen, in deren Darstellung 9 verschiedene Ziffern vorkommen, sodass ihr Produkt mit vier Nullen endet.

Lösung: Wir konstruieren die drei Zahlen a, b, c so, dass $10 \mid a$, $2^3 \mid b$ und $5^3 \mid c$. Daraus würde dann wie gewünscht folgen, dass

$$10000 = 10 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \mid abc.$$

Wir setzen zuerst $c = 125$ und bestimmen nun a als Vielfaches von 10 und b als Vielfaches von 8, sodass alle Ziffern verschieden sind. Eine Möglichkeit ist zum Beispiel $b = 864 = 108 \cdot 8$ und $a = 370 = 37 \cdot 10$. Insgesamt erhalten wir die drei Zahlen (125, 370, 864).

1.6 (a) Bestimme alle natürliche Zahlen, die genau 41 Teiler haben und durch 41 teilbar sind.

(b) Bestimme alle natürliche Zahlen, die genau 42 Teiler haben und durch 42 teilbar sind.

Lösung:

(a) Betrachte die Primfaktorzerlegung der gesuchten Zahl

$$41^n \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

wobei p_1, \dots, p_k die verschiedenen, von 41 verschiedenen Primteiler sind. Da die Zahl durch 41 teilbar sein muss, gilt $n \geq 1$. Ausserdem hat die Zahl genau $(n + 1)(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ verschiedene Teiler. Wir erhalten also die Gleichung

$$41 = (n + 1)(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Da 41 eine Primzahl ist und da nach Annahme $(n + 1) \geq 2$ ist, gilt $(n + 1) = 41$ und $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Somit ist 41^{40} die einzige Zahl, welche die Bedingung erfüllt.

(b) Zuerst stellen wir fest, dass $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Analog zu den Überlegungen in (a) zeigt dies, dass die Primfaktorzerlegung der gesuchten Zahl gegeben ist durch

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$$

mit $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 42$. Um die Teilbarkeit durch 42 sicherzustellen, müssen α, β und γ allesamt mindestens 1 sein. Da die einzige Faktorisierung von 42 in drei nicht-triviale Faktoren durch $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ gegeben ist, erhalten wir die folgenden sechs Zahlen als Lösungen:

$$2 \cdot 3^2 \cdot 7^6, 2 \cdot 3^6 \cdot 7^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 7^6, 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7, 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2, 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Olympiade

1.7 Finde alle natürlichen Zahlen n mit $n + 1 \mid n^2 + 1$.

Lösung: Nach Annahme gilt $n + 1 \mid n^2 + 1$ und natürlich gilt auch $n + 1 \mid n(n + 1) = n^2 + n$. Somit teilt $n + 1$ auch die Differenz:

$$n + 1 \mid (n^2 + n) - (n^2 + 1) = n - 1.$$

Für $n > 1$ gilt $n + 1 > n - 1 > 0$ und somit kann $n + 1$ in diesem Fall kein Teiler von $n - 1$ sein. Somit ist $n = 1$ die einzige Möglichkeit und tatsächlich gilt in diesem Fall $2 \mid 2$.

1.8 Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es n aufeinanderfolgende Zahlen, von denen keine prim ist.

Lösung: Betrachte die folgende Menge von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen:

$$M = \{(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1)\}.$$

Per Definition ist $(n + 1)!$ durch alle natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots, (n + 1)\}$ teilbar. Wir zeigen nun, dass keine der Zahlen aus M prim ist. Tatsächlich ist für jedes $k \in \{2, 3, \dots, (n + 1)\}$ die Zahl $(n + 1)! + k$ durch k teilbar, denn k ist sowohl ein Teiler von $(n + 1)!$ als auch von k .

1.9 Zeige, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, sodass $2n$ ein Quadrat, $3n$ eine dritte Potenz und $5n$ eine fünfte Potenz ist.

Lösung: Wir konstruieren zuerst eine solche Zahl von der Form $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$. Die drei Annahmen aus der Aufgabenstellung geben uns folgende Teilbarkeitsbedingungen für α, β und γ :

$$\begin{array}{lll} 2 \mid \alpha + 1 & 3 \mid \alpha & 5 \mid \alpha \\ 2 \mid \beta & 3 \mid \beta + 1 & 5 \mid \beta \\ 2 \mid \gamma & 3 \mid \gamma & 5 \mid \gamma + 1 \end{array}$$

Wir sehen, dass diese Bedingungen zum Beispiel für $\alpha = 15, \beta = 20$ und $\gamma = 24$ erfüllt sind. Somit ist $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$ eine solche Zahl. Sei nun p eine von 2, 3 und 5 verschiedene Primzahl. Dann erfüllt die Zahl $p^{30} \cdot 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$ immer noch die Bedingung. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, finden wir auch unendlich viele solcher Zahlen.

2 ggT und kgV

Einstieg

2.1 (IMO 59) Zeige, dass sich folgender Bruch nicht kürzen lässt:

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

Lösung: Wir verwenden den Euklid'schen Algorithmus, um zu zeigen, dass der ggT der beiden Zahlen 1 ist und die Zahlen somit teilerfremd sind:

$$\begin{aligned}(21n + 4, 14n + 3) &= ((21n + 4) - (14n + 3), 14n + 3) \\ &= (7n + 1, 14n + 3) \\ &= (7n + 1, (14n + 3) - 2 \cdot (7n + 1)) \\ &= (7n + 1, 1) = 1.\end{aligned}$$

2.2 Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit

$$\text{kgV}(a, b) = 10 \text{ ggT}(a, b)$$

Lösung: Sei $d = \text{ggT}(a, b)$ und schreibe $a = dm$, $b = dn$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$. Dann gilt $\text{kgV}(a, b) = dmn$ und somit $mn = 10$. Alle Lösungen sind also von der Form $(a, b) = (dm, dn)$, wobei d, m, n natürliche Zahlen sind, $\text{ggT}(m, n) = 1$ und $mn = 10$. Insgesamt erhalten wir also für jede natürliche Zahl d die folgenden Lösungen:

$$(d, 10d), (2d, 5d), (5d, 2d), (10d, d).$$

Fortgeschritten

2.3 Jede natürliche Zahl $n > 6$ ist die Summe zweier teilerfremder natürlicher Zahlen > 1 .

Lösung: Falls n ungerade ist, schreiben wir $n = 2k + 1$ für eine natürliche Zahl $k \geq 3$. Dann gilt $n = (k + 1) + k$ mit $\text{ggT}(k, k + 1) = 1$ und wir sind bereits fertig. Falls n gerade ist, gilt $n = 2k$ für eine natürliche Zahl $k > 3$. In diesem Fall müssen wir zusätzlich unterscheiden, ob k gerade oder ungerade ist: Falls k gerade ist, dann ist $k - 1$ ungerade und wir schreiben $n = (k - 1) + (k + 1)$. Tatsächlich gilt dann $\text{ggT}(k - 1, k + 1) = \text{ggT}(k - 1, 2) = 1$. Ausserdem folgt aus $k > 3$ auch $k - 1 > 2$ und wir haben eine Zerlegung gefunden. Falls k ungerade ist, dann ist $k - 2$ ebenfalls ungerade und nach Annahme gilt auch $k - 2 > 1$. Somit erfüllt die Zerlegung $n = (k - 2) + (k + 2)$ die Bedingung: $\text{ggT}(k - 2, k + 2) = \text{ggT}(k - 2, 4) = 1$.

2.4 Wir nennen natürliche Zahlen a und b *befreundet*, wenn $a \cdot b$ eine Quadratzahl ist. Beweise, dass wenn a und b befreundet sind, dann sind auch a und $\text{ggT}(a, b)$ befreundet.

Lösung: Sei $d = \text{ggT}(a, b)$ und schreibe $a = dm$, $b = dn$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$. Nehme an, dass $a \cdot b = d^2 \cdot m \cdot n$ eine Quadratzahl ist. Da m und n teilerfremd sind, bedeutet dies, dass m und n selber auch Quadratzahlen sind. Doch dann ist auch $a \cdot \text{ggT}(a, b) = d^2 \cdot m$ eine Quadratzahl und somit sind a und $\text{ggT}(a, b)$ befreundet.

Olympiade

2.5 Seien m und n zwei natürliche Zahlen, deren Summe eine Primzahl ist. Zeige, dass m und n teilerfremd sind.

Lösung: Nehme an, dass m und n nicht teilerfremd sind und definiere $d = \text{ggT}(m, n) \geq 2$. Es gilt $d | m$ und $d | n$ und somit auch $d | m + n$. Ausserdem ist $d \leq m$ und $d \leq n$, woraus $d < m + n$ folgt. Also ist d ein nicht-trivialer Teiler von $m + n$, weshalb $m + n$ nicht prim ist.

2.6 (Kanada 97) Bestimme die Anzahl Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit $x \leq y$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\text{ggT}(x, y) = 5! \text{ und } \text{kgV}(x, y) = 50!$$

Lösung: Sei $d = \text{ggT}(x, y)$ und schreibe $x = dm$, $y = dn$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$. Dann gilt $d = 5!$ und $\text{kgV}(x, y) = dmn = 50!$, also $mn = \frac{50!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 50$. In der Zahl $\frac{50!}{5!}$ tauchen die 15 Primzahlen $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ jeweils mindestens einmal auf. Sei nun p eine dieser Primzahlen. Wenn m durch p teilbar ist, dann darf n nach Annahme nicht durch p teilbar sein. Folglich können wir die Menge P auf die beiden Zahlen m und n aufteilen, was auf 2^{15} Arten möglich ist. Bis jetzt haben wir noch nicht berücksichtigt, dass $x \leq y$ und somit $m \leq n$ gelten soll. Beachte, dass $m = n$ nicht möglich ist, da die beiden Zahlen verschiedene Primfaktoren haben. Somit haben wir genau die doppelte Anzahl Paare gezählt, da wir für $x > y$ jeweils sowohl (x, y) als auch (y, x) gezählt haben. Insgesamt gibt es also 2^{14} verschiedene Paare, welche die Bedingung erfüllen.

3 Abschätzungen

Einstieg

3.1 Wir nennen ein Rechteck *schön*, wenn die Längen der Seiten natürliche Zahlen sind und die Masszahlen für die Fläche und den Umfang des Rechtecks übereinstimmen. Bestimme alle *schönen* Rechtecke.

Lösung: Seien a, b die Seiten des Rechtecks. In einem schönen Rechteck erfüllen sie die Gleichung $ab = 2(a + b) \Leftrightarrow ab - 2(a + b) = 0$. Aus Symmetriegründen können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a \geq b$ ist. Nehme ausserdem an, dass $b \geq 5$ gilt. Dann haben wir

$$ab - 2(a + b) = b(a - 2) - 2a \geq 5(a - 2) - 2a = 3a - 10 \geq 15 - 10 > 0$$

und somit gibt es kein schönes Rechteck mit diesen Seitenlängen. Wir sehen also, dass die kürzere Seite eines schönen Rechtecks maximal Länge 4 hat. Durchprobieren der Fälle $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ ergibt die beiden Lösungen $(a, b) = (6, 3)$ und $(a, b) = (4, 4)$. Aus Symmetriegründen ist natürlich auch $(a, b) = (3, 6)$ eine Lösung.

3.2 Finde alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1.$$

Lösung: Nehme nun an, dass $y \geq 3$ und $x \geq 4$. Dann ist die linke Seite strikt kleiner als 1, was nicht sein kann. Also ist entweder $y \leq 2$ oder $x \leq 3$. Durchtesten dieser fünf Fälle ergibt die beiden Lösungen $(x, y) = (2, 4)$ und $(x, y) = (3, 3)$.

Fortgeschritten

3.3 Wir nennen einen Quader *schön*, wenn die Längen der Seiten natürliche Zahlen sind und die Masszahlen für die Oberfläche und das Volumen des Quaders übereinstimmen. Bestimme alle *schönen* Quader.

Lösung: Seien a, b, c die Seiten eines schönen Quaders, das heisst sie erfüllen

$$abc = 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow abc - 2(ab + bc + ca) = 0.$$

Aus Symmetriegründen können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a \leq b \leq c$. Nehme ausserdem an, dass $a \geq 7$. Dann gilt

$$\begin{aligned} abc - 2(ab + bc + ca) &= a(bc - 2b - 2c) - 2bc \geq 7(bc - 2b - 2c) - 2bc \\ &= 5bc - 14b - 14c = b(5c - 14) - 14c \\ &\geq 35c - 98 - 14c = 21c - 98 \\ &\geq 147 - 98 > 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch und deshalb gilt $a \leq 6$. Wir testen nun die Fälle $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ einzeln durch:

$a = 1 \Rightarrow bc - 2b - 2c - 2bc = 0 \Rightarrow -(bc + 2b + 2c) = 0$. Dies ist ein Widerspruch, da die linke Seite immer negativ ist.

$a = 2 \Rightarrow 2bc - 2b - 2c - 2bc = 0 \Rightarrow -2(b + c) = 0$. Auch hier ist die linke Seite immer negativ und wir erhalten keine Lösung.

$a = 3 \Rightarrow 3bc - 6b - 6c - 2bc = 0 \Rightarrow bc - 6b - 6c = 0$. Nehme an, dass $c \geq b \geq 13$. Dann gilt $bc - 6b - 6c = b(c - 6) - 6c \geq 7c - 78 > 0$, was ein Widerspruch ist. Wir müssen also noch die Fälle $b \in \{3, 4, \dots, 12\}$ durchtesten und erhalten die folgenden Lösungen für (a, b, c) :

$$(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12).$$

$a = 4 \Rightarrow 4bc - 8b - 8c - 2bc = 0 \Rightarrow bc - 4b - 4c = 0$. Nehme an, dass $c \geq b \geq 9$. Dann gilt $bc - 4b - 4c = b(c - 4) - 4c \geq 5c - 36 > 0$, was ein Widerspruch ist. Wir müssen also noch die Fälle $b \in \{4, 5, \dots, 8\}$ durchtesten und erhalten die folgenden Lösungen für (a, b, c) :

$$(4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8).$$

$a = 5 \Rightarrow 5bc - 10b - 10c - 2bc = 0 \Rightarrow 3bc - 10b - 10c = 0$. Nehme an, dass $c \geq b \geq 7$. Dann gilt $3bc - 10b - 10c \geq 21c - 70 - 10c = 11c - 70 > 0$, was ein Widerspruch ist. Wir müssen also noch die Fälle $b \in \{5, 6\}$ durchtesten und erhalten die folgende Lösung für (a, b, c) :

$$(5, 5, 10).$$

$a = 6 \Rightarrow 6bc - 12b - 12c - 2bc = 0 \Rightarrow bc - 3b - 3c = 0$. Nehme an, dass $c \geq b \geq 7$. Dann gilt $bc - 3b - 3c = b(c - 3) - 3c \geq 4c - 21 > 0$, was ein Widerspruch ist. Wir müssen also noch die Fälle $b = 6$ durchtesten und erhalten die folgende Lösung für (a, b, c) :

$$(6, 6, 6).$$

Wenn wir alle Fälle zusammenfassen, erhalten wir als Lösungen für (a, b, c) folgende Tripel:

$$(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12),$$

$$(4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10), (6, 6, 6),$$

sowie alle symmetrischen Vertauschungen dieser Tripel.

3.4 Finde alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 + \frac{3}{z}.$$

Die rechte Seite ist immer grösser als 1, also gilt dies auch für die linke Seite. Falls jedoch $x \geq 2$ und $y \geq 4$, dann ist die linke Seite höchstens 1, was ein Widerspruch ist. Also ist entweder $x = 1$ oder $y \leq 3$ und wir testen diese Fälle durch:

- $x = 1$: Die Gleichung lautet nun $\frac{2}{y} = \frac{3}{z} \Leftrightarrow 3y = 2z$. In diesem Fall sind die Lösungen also $(x, y, z) = (1, 2k, 3k)$ für eine natürliche Zahl k .
- $y = 1$: Die Gleichung lautet $\frac{1}{x} + 1 = \frac{3}{z}$. Die linke Seite ist immer grösser als 1, also gilt dies auch für die rechte Seite und somit $z < 3$. Dies ergibt die Lösung $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.
- $y = 2$: Die Gleichung lautet nun $\frac{1}{x} = \frac{3}{z} \Leftrightarrow 3x = z$. In diesem Fall sind die Lösungen also $(x, y, z) = (k, 2, 3k)$ für eine natürliche Zahl k .
- $y = 3$: Die Gleichung lautet $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{3}{z}$. Die rechte Seite ist immer grösser als $\frac{1}{3}$. Da dies auch für die linke Seite gilt, muss $x \leq 2$ sein. Dies führt zur Lösung $(x, y, z) = (2, 3, 18)$.

Insgesamt gibt es also die zwei Lösungsfamilien

$$(x, y, z) = (1, 2k, 3k) \quad \text{und} \quad (x, y, z) = (k, 2, 3k) \quad \text{für} \quad k \geq 1,$$

sowie die beiden speziellen Lösungen

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) \quad \text{und} \quad (x, y, z) = (2, 3, 18).$$

3.5 Finde alle natürlichen Zahlen n , sodass $n^2 + 1$ ein Teiler von $n^7 + 13$ ist.

Lösung: Mit Polynomdivision sehen wir, dass $n^7 + 13 = (n^2 + 1)(n^5 - n^3 + n) - n + 13$ gilt. $n^2 + 1$ ist offensichtlich ein Teiler von $(n^2 + 1)(n^5 - n^3 + n)$. Damit $n^2 + 1$ ein Teiler von $n^7 + 13$ ist, muss also auch $(n^2 + 1) \mid -n + 13$ gelten. Dafür, muss jedoch entweder $(n^2 + 1) \leq -n + 13 \Leftrightarrow n \leq 3$ oder $-n + 13 = 0 \Leftrightarrow n = 13$ gelten. Wir testen nun die möglichen Lösungen $n \in \{1, 2, 3, 13\}$ durch und sehen, dass $n^2 + 1$ ein Teiler von $n^7 + 13$ ist, genau dann, wenn $n \in \{1, 3, 13\}$.

Olympiade

3.6 Zeige, dass die Gleichung

$$y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

keine Lösung in den positiven ganzen Zahlen besitzt.

Lösung: Die rechte Seite ist $x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$. Ausserdem haben wir

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x)^2 &= x^4 + 6x^3 + 9x^2, \\ (x^2 + 3x + 1)^2 &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$(x^2 + 3x)^2 < x(x+1)(x+2)(x+3) < (x^2 + 3x + 1)^2$$

für alle natürlichen Zahlen x und deshalb kann $x(x+1)(x+2)(x+3)$ keine Quadratzahl sein.

3.7 Finde alle natürlichen Zahlen x , für die gilt

$$x! = x^2 + 11x - 36$$

Lösung: Wir wollen alle natürlichen Zahlen x finden, sodass $x! - x^2 - 11x + 36 = 0$ gilt. Nehme an, dass $x \geq 5$. Dann gilt

$$x! - x^2 - 11x + 36 > x(x-1)(x-2) - x^2 - 11x + 36 = x^3 - 4x^2 - 9x + 36 > 0,$$

was ein Widerspruch ist. Wir testen also die verbleibenden Fälle $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ durch und finden die beiden Lösungen $x = 3$ und $x = 4$.

3.8 (IMO 98) Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (a, b) , sodass $a^2b + a + b$ durch $ab^2 + b + 7$ teilbar ist.

Lösung: Es gilt

$$ab^2 + b + 7 \mid b \cdot (a^2b + a + b) - a \cdot (ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a.$$

Ausserdem haben wir $ab^2 + b + 7 \geq b^2 - 7a$ für alle natürlichen Zahlen a und b . Somit kann die Bedingung nur erfüllt sein, wenn $b^2 - 7a \leq 0$ gilt. Falls $b^2 - 7a = 0$ gilt, erhalten wir die Lösungsfamilie $(a, b) = (7k^2, 7k)$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Falls aber $b^2 - 7a < 0$ ist, dann muss $7a - b^2 \geq ab^2 + b + 7$ gelten, damit die obige Teilbarkeit erfüllt sein kann. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(a+1)b^2 + b + 7 - 7a \leq 0.$$

Für $b \geq 3$ erhalten wir $(a+1)b^2 + b + 7 - 7a \geq 2a + 17 > 0$ und die obige Ungleichung kann nicht stimmen. Also müssen wir noch die beiden Fälle $b = 2$ und $b = 1$ durchtesten.

Für $b = 2$ erhalten wir aus der ursprünglichen Teilbarkeitsbedingung $4a + 9 \mid 2a^2 + a + 2$. Daraus folgt aber auch

$$4a + 9 \mid 2 \cdot (2a^2 + a + 2) - (a-1) \cdot (4a + 9) = 3a - 5.$$

Diese Bedingung ist nie erfüllt, da der Betrag der linken Seite für alle natürlichen Zahlen a grösser ist als der Betrag der rechten Seite und die rechte Seite niemals null ist. Somit gibt es für $b = 2$ keine Lösung.

Für $b = 1$ erhalten wir $a + 8 \mid a^2 + a + 1$ und somit auch

$$a + 8 \mid (a^2 + a + 1) - (a-7) \cdot (a+8) = 57.$$

Da $57 = 3 \cdot 19$, gilt $a = 11$ oder $a = 49$.

Insgesamt erhalten wir also die Lösungsfamilie

$$(a, b) = (7k^2, 7k) \text{ für } k \in \mathbb{N},$$

sowie die beiden speziellen Lösungen

$$(a, b) = (11, 1) \text{ und } (a, b) = (49, 1).$$