

Théorie des nombres II - Exercices

Actualisé: 21 février 2017
vers. 1.3.0

1 Congruences I

1. Si $m > 1$ et a sont des entiers, alors un des nombres

$$a, a + 1, a + 2, \dots, a + m - 1$$

est divisible par m .

2. $p, p + 4$ et $p + 14$ sont premiers. Trouver p .
3. Si x et y sont des naturels impairs, alors $x^2 + y^2$ n'est pas un carré.
4. Montrer qu'il existe une infinité de premiers de la forme $4k + 3$.
5. Si on a $9 \mid a^2 + ab + b^2$, alors a et b sont divisibles par 3.
6. Pour quels entiers n a-t-on $n^2 + 3n + 5$
- (a) divisible par 11 ?
- (b) divisible par 121 ?
7. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0.$$

Montrer que $4 \mid n$.

8. (OIM 87) Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ avec

$$f(f(n)) = n + 1987.$$

9. (Russie 97) Trouver tous les pairs de premiers p, q avec $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.
10. (CH 03) Soient des entiers $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{101} < 5050$. Montrer qu'on peut toujours en choisir quatre a_k, a_l, a_m, a_n différents avec

$$5050 \mid (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

La fonction φ et le théorème d'Euler-Fermat

1. (OIM 64)
- a) Trouver tous les nombres naturels n tels que $2^n - 1$ est divisible par 7.

- b) Montrer que $2^n + 1$ n'est jamais divisible par 7.
- Montrer que $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.
 - Trouver tous les naturels n tels que $3 \mid n \cdot 2^n - 1$.
 - (OIM 78) Soient m et n deux naturels avec $m < n$. Les trois derniers chiffres de 1978^m et 1978^n (en représentation décimale) sont les mêmes. Trouver m et n tel que $m + n$ est minimal.
 - Soit n un nombre naturel impair. Montrer que n divise $2^{n!} - 1$.
 - Si n est pair, alors $323 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1$.
 - Trouver tous les naturels x, y, z, t et n qui satisfont

$$n^x + n^y + n^z = n^t.$$

- FERMAT a affirmé que tous les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ sont premiers. Mais ceci est faux, EULER était le premier qui a montré que $641 \mid F_5$. Vérifier.
- Trouver les deux derniers chiffres de $7^{7^{7^7}}$.

Le théorème des restes chinois

Restes quadratiques et puissances élevées

- Montrer que, pour tout premier $p > 3$, on a $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.
- Montrer que si p et $p^2 + 2$ sont des nombres premiers, alors $p^3 + 2$ est premier.
- $n \geq 2$. Soit $q = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit des n premiers nombres premiers. Montrer que $q - 1$ n'est pas un carré.
- (CH 98) Trouver tous les nombres premiers p tels que $p^2 + 11$ a exactement 6 diviseurs positifs.
- Si $n \in \mathbb{N}$, tel que $2n + 1$ et $3n + 1$ sont des carrés, alors on a $40 \mid n$.
- (MMO 1984) Trouver toutes les solutions entières de l'équation $19x^3 - 84y^2 = 1984$.
- Pour $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ on a $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$. Montrer qu'au moins trois des nombres sont pairs, qu'au moins trois sont divisibles par 5 et qu'au moins deux se terminent par le chiffre 0.
- (CH 02) Soit n un entier positif avec au moins quatre diviseurs positifs distincts. Soient d_1, d_2, d_3, d_4 les quatre diviseurs les plus petits parmi eux. Trouver tous les n satisfaisant

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

- (OIM 86) Soit d un entier positif $\neq 2, 5, 13$. Montrer que dans l'ensemble $\{2, 5, 13, d\}$, il y a deux éléments a, b pour lesquels $ab - 1$ n'est pas un carré.
- (OIM 96) Soient a, b des nombres naturels tels que $15a + 16b$ et $16a - 15b$ sont des carrés. Trouver la valeur minimale que le plus petit carré des deux peut prendre.
- Montrer que 19^{19} n'est pas la somme d'une troisième et d'une quatrième puissance.

2 Factorisation

1. Montrer que pour tout naturel n , on a $30 \mid n^5 - n$.
2. Si n n'est pas un nombre premier, alors $2^n - 1$ ne l'est pas non plus. Si n possède un facteur impair > 1 , alors $2^n + 1$ n'est pas premier.
3. (OIM 68) Montrer qu'il existe une infinité de nombres naturels m tels que $n^4 + m$ n'est premier pour aucun n naturel.
4. Montrer que pour $n > 2$, le nombre $2^{2^n-2} + 1$ n'est jamais premier.
5. Y a-t-il des nombres premiers p, q, r avec $p^2 + q^3 = r^4$?
6. (Autriche 95) Combien y a-t-il de nombres a) pairs b) impairs n tels que n est un diviseur de $3^{12} - 1$, mais pas de $3^k - 1$ pour $k = 1, 2, \dots, 11$?
7. Trouver toutes les solutions entières positives de l'équation

$$|3^x - 2^y| = 1.$$

8. Prenons plusieurs nombres entiers se trouvant entre deux carrés consécutifs. Montrer que leurs produits par paires seront tous distincts.
9. Trouver tous les nombres naturels x, y, z tels que

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 189.$$

10. Le nombre $4^{545} + 545^4$ est-il premier ?
11. Montrer que l'équation $y^2 = x^3 + 7$ n'a pas de solution entière.
12. (CH 03) Trouver le plus grand nombre naturel n qui, pour tout nombre naturel a , est un diviseur de $a^{25} - a$.
13. Soit $n \geq 1$. Montrer que $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ possède au moins n diviseurs premiers distincts.
14. Trouver toutes les solutions positives entières de l'équation

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

15. Montrer que $(5^{125} - 1)/(5^{25} - 1)$ est un nombre composé.
16. Démontrer que 1280000401 est un nombre composé.
17. Si $4^n + 2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est une puissance de trois.
18. (CSO 95) Soit p un nombre premier impair. Trouver tous les paires x, y de nombres entiers non-négatifs tels que

$$p^x - y^p = 1.$$

3 Chiffres et systèmes de numération

Les nombres et leurs chiffres

1. Un nombre à quatre chiffres $aabb$ est un carré. Que vaut-il ?
2. Si un nombre de la forme $\underbrace{111 \dots 11}_n$ est premier, alors n l'est aussi.
3. Montrer que dans la suite $1, 31, 331, 3331, \dots$ il y a une infinité de termes qui sont composés.
4. Montrer que $1982 \mid 222 \dots 22$ (1982 deux).
5. (OIM 60) Trouver tous les nombres N à trois chiffres, divisibles par 11 tels que $N/11$ est la somme des carrés des chiffres de N .
6. Trouver tous les nombres à quatre chiffres $abcd$ tels que $4 \cdot abcd = dcba$.
7. (Angleterre 96) Le couple

$$(M, N) = (3600, 2500)$$

a de nombreuses propriétés. Les deux nombres ont quatre chiffres et ils ont des chiffres identiques en exactement deux positions. Aux deux autres positions les chiffres de M valent un de plus que ceux de N . De plus les deux nombres sont des carrés. Trouver tous les couples (M, N) ayant toutes ces propriétés.

8. La représentation décimale de A est composée de 600 six et quelques zéros. Peut A être un carré ?
9. Montrer que

$$\underbrace{11 \dots 1}_{2n} = \underbrace{22 \dots 2}_n + (\underbrace{33 \dots 3}_n)^2.$$

10. Pour un nombre naturel n appelons \bar{n} le nombre obtenu en inversant l'ordre des chiffres de n (par exemple $n = 1623$, $\bar{n} = 3261$). Soit k tel que $k \mid n \implies k \mid \bar{n}$ pour tout n . Montrer que $k \mid 99$.
11. (OIM 62) Déterminer le plus petit nombre naturel se terminant par le chiffre 6 tel que le nombre devient quatre fois plus grand si on met le dernier chiffre en première position.
12. (Afrique du Sud 97) Trouver tous les nombres naturels ayant la propriété que si on met le premier chiffre en dernière position, alors le résultat est $3\frac{1}{2}$ fois plus grand que le nombre que l'on avait au départ.
13. (Shortlist 90) Trouver tous les nombres naturels n tels que tout nombre écrit dans le système décimal et composé de $n - 1$ uns et un sept soit premier.

Représentation d'un nombre en base b

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(1) = 1$ et

$$f(n) = \begin{cases} 1 + f(\frac{n-1}{2}), & n \text{ impair,} \\ 1 + f(\frac{n}{2}), & n \text{ pair.} \end{cases}$$

2. (OIM 88) Pour $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ soit $f(1) = 1, f(3) = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

- (a) $f(2n) = f(n)$,
- (b) $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$,
- (c) $f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$.

Trouver le nombre de $n \leq 1988$ avec $f(n) = n$.

3. (Chine 95) Supposons que pour $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on ait $f(1) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
- (a) $3f(n)f(2n + 1) = f(2n)(1 + 3f(n))$,
 - (b) $f(2n) < 6f(n)$.

Trouver toutes les solutions de l'équation $f(k) + f(m) = 293$.

4. (OIM 70) Soit $0 \leq x_i < b$ pour $i = 0, 1, \dots, n$ et de plus $x_n, x_{n-1} > 0$. Soit $a > b$ et $x_n x_{n-1} \dots x_0$ lu en base a le nombre A et lu en base b le nombre B . De façon similaire, soit $x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$ lu en base a le nombre A' et lu en base b le nombre B' . Montrer que $A'B < AB'$.
5. (USA 96) Décider s'il existe un ensemble X de nombres entiers tel que l'équation $a + 2b = n$ ait exactement une solution $a, b \in X$ pour tout n entier.