

Zahlentheorie III - Aufgaben

Aktualisiert: 28. April 2016

vers. 1.3.3

1 Spezielle Gleichungstypen

Quadratische Gleichungen

1. Zeige, dass die Gleichung $x^2 + y + z - xyz = 1$ nur endlich viele Lösungen in natürliche Zahlen besitzt

2. Finde alle natürlichen Zahlen, die sich in der Form

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$$

darstellen lassen, wobei a, b natürliche Zahlen sind.

3. (IMO 03) Finde alle Paare positiver ganzer Zahlen (a, b) , sodass

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

eine positive ganze Zahl ist.

4. (CH 04) Finde alle natürlichen Zahlen, die sich in der Form

$$\frac{(a + b + c)^2}{abc}$$

darstellen lassen, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind.

Pythagoräische Tripel

1. Finde alle Pythagoräischen Tripel (x, y, z) , sodass x, y und z eine arithmetische Folge bilden.

2. (Bulgarien 98) Finde alle Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1997(x - y).$$

3. Bestimme alle Tripel (a, b, c) von teilerfremden ganzen Zahlen, welche folgende Gleichung erfüllen:

$$a^2 + ab + b^2 = c^2.$$

4. Zeige, dass keine ganzzahlige Lösung (x, y, z) der Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2$$

existiert, wobei $x, y \neq 0$. (Dies impliziert Satz 5.2 für $n = 4$)

5. Bestimme alle Paare ganzer Zahlen (a, b) , sodass $a^2 + b^2$ und $a^2 - b^2$ beides Quadratzahlen sind.

Die Pell Gleichung

1. Zeige, dass es unendlich viele Paare natürlicher Zahlen (m, n) gibt, sodass gilt

$$1 + 2 + \dots + m = (m + 1) + (m + 2) + \dots + n.$$

2. Finde alle Lösungen der Gleichung $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ in natürlichen Zahlen.
3. Ist n eine natürliche Zahl, sodass $3n + 1$ und $4n + 1$ beides Quadrate sind, dann ist n durch 56 teilbar.
4. (USA 86) Bestimme die kleinste natürliche Zahl $n > 1$, sodass das quadratische Mittel der ersten n natürlichen Zahlen ganz ist.
5. Beweise, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, sodass $n^2 + 1$ ein Teiler von $n!$ ist.
6. Beweise, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

unendlich viele ganze Lösungen besitzt.

7. (Shortlist 01) Betrachte das Gleichungssystem

$$x + y = z + u$$

$$2xy = zu.$$

Bestimme die grösste reelle Zahl m , sodass für jede positive ganzzahlige Lösung (x, y, z, u) des Systems mit $x \geq y$ gilt:

$$m \leq \frac{x}{y}.$$

Konstruktion von Lösungen

1. Zeige, dass unendlich viele Primzahlen $p \equiv 3 \pmod{4}$ existieren.
2. Zeige, dass unendlich viele Dreieckszahlen auch Quadratzahlen sind.
3. (IMO 87) Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Zeige: Es gibt eine Anordnung von n Punkten in der Ebene, sodass je zwei Punkte einen irrationalen Abstand haben und je drei Punkte ein nicht degeneriertes Dreieck mit rationalem Flächeninhalt bilden.
4. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Beweise, dass ganze Zahlen $a_1, \dots, a_n, b \geq 2$ existieren mit

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_n! = b!$$

5. (IMO 97) Eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus der Menge $S = 1, 2, \dots, 2n - 1$ heisst *silberne* Matrix, falls für jedes $i = 1, 2, \dots, n$ die i -te Zeile und die i -te Spalte zusammen alle Elemente von S enthalten. Zeige:
 - (a) Es gibt keine silberne Matrix für $n = 1997$.
 - (b) Silberne Matrizen gibt es für unendlich viele Werte von n .
6. (USA 98) Sei $n \geq 2$. Beweise, dass eine Menge S von n natürlichen Zahlen existiert, sodass $(a - b)^2$ ein Teiler ist von ab für je zwei verschiedene Elemente $a, b \in S$.

7. Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ungerade natürliche Zahlen x_n und y_n existieren mit

$$7x_n^2 + y_n^2 = 2^n.$$

8. (China 97) Zeige, dass unendlich viele natürliche Zahlen existieren, sodass die Zahlen $1, 2, \dots, 3n$ auf drei Folgen

$$a_1, \dots, a_n, \quad b_1, \dots, b_n, \quad c_1, \dots, c_n$$

verteilt werden können mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = \dots = a_n + b_n + c_n.$

(b) $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n = c_1 + \dots + c_n$ und diese Zahl ist durch 6 teilbar.

2 Kongruenzen II

Ordnungen

1. Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (a, n) , sodass

$$\frac{(a+1)^n - a^n}{n}$$

eine ganze Zahl ist.

2. (IMO 99) Bestimme alle Paare (n, p) natürlicher Zahlen, sodass p eine Primzahl ist, $n \leq 2p$ gilt und

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$$

3. Verallgemeinere Beispiel 4 aus Zahlentheorie 2 auf beliebige Exponenten n , die nicht prim sein müssen.

4. (IMO 03) Sei p eine Primzahl. Beweise, dass eine Primzahl q existiert, sodass für alle ganzen Zahlen n gilt

$$q \nmid n^p - p.$$

5. Finde alle Primzahlen p, q , sodass

$$pq \mid 5^p + 5^q$$

Primitive Wurzeln

1. For a given prime $p > 2$ and positive integer k let

$$S_k = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$$

Find those values of k for which $p \mid S_k$

2. Sei n eine natürliche Zahl, die eine primitive Wurzel besitzt. Zeige, ohne Satz 2.3 zu verwenden, dass -1 die einzige Restklasse der Ordnung 2 modulo n ist.

3. (SMO 06) Entscheide, ob eine natürliche Zahl $n > 1$ mit folgenden Eigenschaften existiert:
- n ist keine Primzahl.
 - Für alle ganzen Zahlen a ist $a^n - a$ durch n teilbar.

3 Gaussklammer

- (APMO 01) Bestimme die grösste natürliche Zahl n , sodass die Anzahl natürlicher Zahlen $\leq n$, die durch 3 teilbar sind, gleich der Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq n$ ist, die durch 5 oder 7 (oder beides) teilbar sind.
- $2^n \nmid n!$.
- (England 01) Definiere die Folge a_n durch

$$a_n = n + \lceil \sqrt{n} \rceil,$$

wobei $\lceil x \rceil$ die ganze Zahl bezeichnet, die am nächsten bei x liegt. Bestimme die kleinste natürliche Zahl k , sodass $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+2000}$ eine Folge von 2001 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist.

- (Ibero 97) Sei $a \geq 1$ eine reelle Zahl mit folgender Eigenschaft: Ist m ein Teiler von n , dann ist $\lfloor am \rfloor$ ein Teiler von $\lfloor an \rfloor$. Zeige, dass a eine ganze Zahl ist.
- (Balkan 98) Wieviele verschiedene ganze Zahlen können in der Form $\lfloor n^2/1998 \rfloor$ geschrieben werden für $n = 1, 2, \dots, 1997$?
- (IMO 68) Sei n eine natürliche Zahl. Finde den Wert der Summe

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \dots$$

- (USA 97) Sei p_1, p_2, p_3, \dots die Folge der Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge und sei x_0 eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Definiere für $k > 0$

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x_{k-1} = 0 \\ \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} & \text{wenn } x_{k-1} \neq 0 \end{cases}$$

Bestimme alle Werte von x_0 , für die die Folge irgendwann identisch 0 wird.

- (Australien 92) Sei n eine natürliche Zahl. Finde die Anzahl reeller x mit $1 \leq x < n$, sodass gilt $x^3 = \lfloor x^3 \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^3$.
- (Australien 93) Finde alle natürlichen Zahlen n , sodass folgende Gleichung gilt:

$$\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \rfloor + 1.$$

- (Shortlist 96) Finde alle natürlichen Zahlen m und n , sodass gilt

$$\lfloor m^2/n \rfloor + \lfloor n^2/m \rfloor = \lfloor m/n + n/m \rfloor + mn.$$